Chapitre 3
Espaces Vectoriels normés

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Normes, evn

Définition 1.1.
Soit E un $\mathbb{K}ev$.
Une norme est une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

1. $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ *et* $N(x) = 0 \implies x = 0$ *(axiome de séparation)*
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(axiome d'homogénéité)*
3. $\forall x, y \in E, N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire)*

Un espace vectoriel normé est un $\mathbb{K}ev$ muni d'une norme.

Exemple:

- $(\mathbb{K}, |.|)$
- $\mathbb{K}^n$
  $||x||_\infty = max_{1 \leq k \leq n}(|x_k|)$ (où $x = (x1, ..., x_n)$)
  $||x||_n = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$
  $||x||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: norme dite euclidienne.
  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: norme dite hermitienne. (provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)
- Soit $p \in [1, +\infty[$
  $||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ (l'inégalité triangulaire provient de Holder)
- E $\mathbb{K}ev$ de dimension n
  B base de E
  $||x||_{p,B} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ où $(x1, ..., x_n)$ coordonnées de x dans B
  $||x||_{\infty,B} = max(|x_k|)$

Soient $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$ deux evn
On appelle norme produit sur $E_1 \times E_2$ $N((x1, x2)) = max(N_1(x_1), N_2(x_2))$
C'est la norme dont on munit implicitement $E_1 \times E_2$

- $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$
  $||f||_\infty = sup_{t\in[0,1]}(|f(t)|)$
  $||f||_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{K})$
  $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$
- $E = \{$suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}\}$
  $||u||_\infty = sup_{k\in\mathbb{N}}(|u_k|)$
- $E = \{$suites presque nulles à valeurs dans $\mathbb{K}\}$
  $||u||_\infty = sup_{k\in\mathbb{N}}(|u_k|)$, $||u||_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- $E = \{(u_k)_k \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |u_k|^2$ converge$\}$ est un sev de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $\mathbb{K}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme

□

Remarque 1.2.

1. *Soient (E, N) un $\mathbb{K}$evn, F un sev de E.*
   L'application $N_{|F}$ est une norme sur F appellée induite
2. *Soit N une norme sur E.*
   On a: $\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$ (seconde forme de l'inégalité triangulaire)
   En effet:
   $N(x) = N((x-y)+y) \leq N(x-y) + N(y)$
   Donc: $N(x) - N(y) \leq N(x-y)$
   De même: $N(y) - N(x) \leq N(x-y)$
   Donc: $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$

Définition 1.3.
Soit N une norme sur un $\mathbb{K}$ev E

On appelle distance associée à N l'application :
$$D\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x,y) \longmapsto N(x-y)$$

Propriété 1.4.

- $d(x,y) \leq 0$ *et* $d(x,y) = 0 \implies x = y$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,x)$
- $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$

Remarque 1.5.
Soit X un ensemble et $\delta\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$
On dit que δ est une distance si:
—$\delta(x,y) \leq 0$
—$\delta(x,y) = 0 \implies x = y$
—$\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$
(X,δ) s'appelle un espace métrique

Définition 1.6.
Soit A une partie d'un evn (E,N).
On appelle distance induite sur A l'application
$$\delta\colon A \times A \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$(x,y) \longmapsto N(x-y)$$

Définition 1.7.
Soit (E,N) un evn
Soient $a \in E, r > 0$.
On appelle boucle fermée de centre a et de rayon r:
$\bar{B}_r(a) = \{x \in E, ||x-a|| \leq r\}$
On appelle boucle ouverte de centre a et de rayon r:
$B_r(a) = \{x \in E, ||x-a|| < r\}$

Exemple:

$E = \mathbb{R}^2$
Norme $||.||_\infty$
Dessiner $\bar{B}_1(0)$
$\bar{B}_1(0) = \{x \in E, ||(x,y)|| \leq 1\}$

$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_\infty$
$\bar{B}_1(0)$

$(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), ||.||_1)$
$\bar{B}_1(0)$ □

Définition 1.8.
Soient N_1 et N_2 deux normes.
On dit qu'elles sont équivalentes si:
$\exists A, B \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in E, N_1(x) \leq AN_2(x)$ *et* $N_2 \leq BN_1(x)$

Remarque 1.9.
Quand: $\exists A, \forall x, N_1(x) \leq AN_2(x)$, *on dit que N_2 est plus fine que N_1*

Exercice:

Montrer que sur $\mathbb{K}^n$, $||.||_p$ est équivalente à $||.||_\infty$
Soit $x \in \mathbb{K}^n$

- $||x||_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq n||x||_\infty$
- $\forall k, |x_k| \leq ||x||_p$
  Donc $||x||_\infty \leq ||x||_p$

□

Définition 1.10.
Soit A une partie de (E, N)
On dit que A est bornée si:
$\exists r > 0, A \subset \bar{B}_r(0)$

Ou encore, de manière équivalente:
$\exists a \in E, \exists n > 0, A \subset B_r(a)$
Ou encore, de manière équivalente:
$\exists r > 0, \forall x, y \in A, ||x - y|| \leq r$

2 Suites d'un evn

Définition 2.1.
Soit (E, N) *un evn.*
Soit $(u_n)_n \in E_{\mathbb{N}}$ *et* $a \in E$
On dit que $(u_n)_n$ *converge vers* a *si:*
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies ||u_n - a|| \geq \varepsilon$

Formulations équivalentes:

- $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies ||u_n - a|| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} ||/u_n - a|| = 0$
- $\forall \varepsilon > 0, u^{-1}(B_\varepsilon(a))$ cotient un "voisinage de l'infini" dans $\mathbb{N}$

Remarque 2.2.

- *La limite lorsqu'elle existe est unique.*
- $(u_n)_n$ *converge vers* a *se note* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$

Propriété 2.3.
Soient $(E, N_1), (F, N_2)$ *deux evn*
$(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, (v_n)_n \in f^{\mathbb{N}}$
Posons $w_n = (u_n, v_n)$
Soient $a \in E, b \in F$ *On a:*
$u_n \longrightarrow_{n \to +\infty} a$ *et* $v_n \longrightarrow_{n \to +\infty} b \iff w_n \longrightarrow_{n \to +\infty} (a, b)$

Démonstration:

exercice □

Exercice:

Soit $(u_n)_n \in (\mathbb{R}^s)^{\mathbb{N}}$
On équipe $\mathbb{R}^s$ de la norme $||.||_\pi$
Soit $a = (a_1, ..., a_s) \in \mathbb{R}^s$
Montrer que $u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} a \iff \forall \gamma \in [\![1, s]\!], u_{n,\gamma} \longrightarrow_{n\to+\infty} a_\gamma$ □

Propriété 2.4.
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E.
N_1 et N_2 sont équivalentes ssi N_1 et N_2 définissent la même notion de convergence de suite, ie:
$\forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, \forall a \in E, u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} a$ *pour* $N_1 \iff u_n \longrightarrow_{n\to+\infty} a$ *pour* N_2

Définition 2.5.

- *Une suite $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E*
- *$\lambda \in E$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n \in E\mathbb{N}$ si les énoncés équivalents suivants sont satisfaits:*
  - *Il existe $\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \lambda$*
  - *Il existe $\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n) \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$ et $u_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \lambda$*
  - *Pour tout $\varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N}, ||u_n - \lambda|| \leq \varepsilon\}$ est infini*

Exercice:

Vérifier que ces 3 propriétés sont équivalentes □

Remarque 2.6.

- *Si* $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\psi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *sont 2 applications strictement croissantes, extraire de* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n$ *une sous-suite grâce à* ψ *donne:* $\left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_n$
- *Soient* E, F *deux evn,* $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, (v_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$,
  λ *une valeur d'adhérence de* $(u_n)_n$,
  μ *une valeur d'adhérence de* $(v_n)_n$,
  Il est faux en général que (λ, μ) *soit valeur d'adhérence de* $(u_n, v_n)_n$ *(en tant que suite de* $E \times F$ *muni de la norme produit)*

Exemple:

$E = F = \mathbb{R}$, $(u_n)_n = (-1)^n, v_n = (-1)^n$
1 est valeur d'adhérence de $(u_n)_n$
-1 est valeur d'adhérence de $(v_n)_n$ mais $(1, -1)$ n'est pas valeur d'adhérence de (u_n, v_n).

Parade:
Choisir φ tel que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n\to+\infty} \lambda$
Si μ est une valeur d'adhérence de $(v_{\varphi(n)})_n$ alors (λ, μ) est une valeur d'adhérence de $((u_n, v_n))_n$ $\square$

Définition 2.7.
Soit (E, N) *un evn.*
Une suite $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ *est dite de Cauchy si:*
$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0, ||u_p - u_q|| \leq \varepsilon$

Propriété 2.8.

- *Une suite convergente est une suite de Cauchy*
- *Une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence* λ *converge vers* λ

Remarque 2.9.
Une suite de Cauchy peut ne pas converger

Exercice:

$E = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$
$||u||_\infty = max_{k\in\mathbb{N}}(|u_k|)$
Montrer qu'il existe dans E une suite de cauchy divergente $\square$

3 Topologie

$(E, ||.||)$ est un $\mathbb{K}ev$.
X est une partie de E

Définition 3.1.

- *Soit* $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$
  On dit que $(x_n)_n$ *converge dans* X *si* $(x_n)_n$ *converge dans* E *et si sa limite appartient à* X
- *Soit* $a \in X, r > 0$. *On appelle boule ouverte de* X *centrée en* a *de rayon* r*:* $B_r^X(a) = \{x \in X, ||x - a|| < r\} = B_r(a) \cap X$

Définition 3.2.
Soit $U \subset X$

- *On dit que* U *est ouvert dans* X *si:*
  $\forall a \in U, \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(a) \subset X$
- *Soit* $a \in U$. *On dit que* a *est intérieur à* U *si:* $\exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(a) \subset U$
  On dit aussi que U *est un voisinage de* a.

Remarque 3.3.
Un ouvert est donc une partie dont tous les points lui sont intérieurs.

Exemple:

1. $\varnothing$ est une partie ouverte de X
2. X est une partie ouverte de X

3. $X = [0, 1[$.
   $[0, \frac{1}{2}[$ est une partie ouverte de X (mais n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$)

4. Si $A \subset X$ est une partie ouverte dans E, alors A est une partie ouverte dans X

5. Soit $a \in X, r > 0$
   $B_r^X(a)$ est un ouvert de X

$\square$

Propriété 3.4.

- *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
- *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Démonstration:

- Soit $(Ui)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$
  Soit $a \in U$
  Il existe $i \in I$ tel que $a \in U_i$ et, puisque U_i est ouvert, $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon^X(a) \subset U_i$
  On a: $B_\varepsilon^X(a) \subset U$
  Donc U est ouvert

- Soit U_1 et U_2 deux ouverts de X.
  Soit $a \in U_1 \cap U_2$
  Il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que $B_{\varepsilon_1}^X(a) \subset U_1 . B_{\varepsilon_2}^X(a) \subset U_2$
  On a: $B_{min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}^X(a) \subset U_1 \cap U_2$
  Donc $U_1 \cap U_2$ est un ouvert.

$\square$

Remarque 3.5.
Une intersection quelconque d'ouverts peut ne pas être ouverte.

Exemple:

$X = \mathbb{R}$
$U_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$

$\square$

Définition 3.6.
Soit A une partie de X.
Il existe un plus grand ouvert (de X) contenu dans A.
On l'appelle intérieur de A et on le note $\mathring{A}$.
C'est l'ensemble des points intérieurs à A.

Démonstration:

- Il existe un ouvert contenu dans A: $\varnothing$
- La réunion de tous les ouverts contenus dans A est un ouvert de A, et c'est clairement le plus grand
- Ainsi: $\mathring{A}$ est bien définit et $\mathring{A} = \bigcup_{U \subset A U \text{ ouvert}} U$

$\square$

Soit V l'ensemble des points intérieurs à A.
Montrons que V est ouvert:
Soit $a \in V$.
Il existe $r > 0, B_r^X(a) \subset A$.
Comme $B_r^X(a)$ est un ouvert, ses points lui sont intérieurs et sont donc intérieurs à $A : B_r^X(a) \subset V$
V est donc un ouvert.
Si U est un ouvert contenu dans A, alors les points de V lui sont intérieurs, donc sont intérieurs à $A : U \subset V$
V est donc le plus grand ouvert contenu dans A
$V = \mathring{A}$

Définition 3.7.
Soit $A \subset X$

- *Un point $a \in X$ est dit adhérent à A si:*
  $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon^X(a) \cap A \neq \varnothing$
- *On dit que A est fermé s'il contient tous les points (de X) qui lui sont adhérents.*

Remarque 3.8.

- *$\varnothing$ est un fermé de X*

- *X est un fermé de X*
- *Soit $A \subset X$*
  A fermé dans $E \implies A$ fermé dans X
- *$E = \mathbb{R}, X =]-1, 1[$*
  X est fermé dans X
  X n'est pas fermé dans E
  "a n'est pas adhérent à A" équivaut à: "a est intérieur à $X \setminus A$"
  En effet: a n'est pas adhérent à $A \iff \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon^X(a) \cap A = \varnothing$
  $\iff \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon^X(a) \subset X \setminus A$
  $\iff a$ est intérieur'à $X \setminus A$
- *A est fermé $\iff {}^cA$ ouvert.*
  - *Supposons A fermé.*
    Soit $a \in {}^cA$.
    Alors a n'est pas adhérent à A (car a adhérent à A entraine $a \in A$)
    Donc a est intérieur à $X \setminus A$
  - *Supposons $X \setminus A$ ouvert.*
    Soit a adhérent à A.
    $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon^X(a) \cap A \neq \varnothing$.
    Donc: $\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon^X(a) \not\subset X \setminus A$.
    Donc a n'est pas intérieur à $X \setminus A$.
    Comme $X \setminus A$ est ouvert, $a \notin X \setminus A$.
    Donc A est fermé

Propriété 3.9.

- *Une réunion finie de fermés est fermée.*
- *Une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Démonstration:

Exercice □

Définition 3.10.
Soit A une partie de X.
Il existe un plus petit fermé (de X) contenant A.

On l'appelle adhérence de A. On le note $\bar{A}$.
C'est l'ensemble des points adhérents à A.

Démonstration:

Exercice $\square$

Propriété 3.11.
Soit A une partie de X, et $a \in X$.

- $a \in \bar{A} \iff \exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$
- $a \in \mathring{A} \iff \left[\forall (u_n)_n \in X^{\mathbb{N}}, \left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a\right) \implies (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in A)\right]$

Définition 3.12.
Soit $A \subset X$.
On dit que A est dense dans X si $\bar{A} = X$

Propriété 3.13.
Soit $A \subset X$, Les énoncés suivants sont équivalents:

i *A est dense dans X.*

ii *A rencontre toute boule ouverte de X.*

iii *A rencontre tout ouvert non vide de X.*

Démonstration:

- $[i \iff ii]$: A dense dans $X \iff \forall a \in X, a \in \bar{A}$
$$\iff \forall a \in X, \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(a) \cap A \neq \varnothing$$
$$\iff A \text{ rencontre toute boule ouverte}$$
- $[ii \implies iii]$: Car tout ouvert different de $\varnothing$ contient une boule ouverte.
- $[iii \implies ii]$: Car toute boule ouverte est un ouvert non vide.

$\square$

Exercice:

1. Une intersection de deux parties denses est-elle dense ?
   Non. En effet, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont deux parties denses de $\mathbb{R}$ mais leur intersection est vide, donc non dense.

2. L'intersection d'un ouvert dense et d'une partie dense est-elle dense ?
   U ouvert dense, B partie dense.
   Soit V un ouvert non vide.
   $U \cap V$ est un ouvert non vide. Donc $(U \cap V) \cap B \neq \varnothing$.
   ie: $U \cap (V \cap B) \neq \varnothing$. $U \cap B$ est donc dense.

$\square$

Définition 3.14.
Soit $A \subset X$ et $a \in A$.

1. *On dit que a est un point isolé de A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon^X(a) \cap A = \{a\}$*
2. *On dit que a est un point d'accumulation de A si a est adhérent à $A \setminus \{a\}$.*

Exercice:

Vérifier que si a est un point d'accumulation de A ssi $a \in \bar{A}$ mais a n'est pas un point isolé de A. $\square$

Définition 3.15.
Soit $A \subset X$.
On appelle frontière de A (dans X):

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{{}^c A}$$

4 Limites et continuité

Définition 4.1.
Soient E et F deux evn.
Soient $X \subset F, Y \subset F$.
Soit $f\colon X \longrightarrow Y, A \subset X, a \in \bar{A}^X$ (adhérence dans X).

On dit que $f(x)$ converge vers b quand x tend vers a par valeurs dans A si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, ||x - a|| \leq \eta \implies ||f(x) - b|| \leq \varepsilon$$

Ou, de manière équivalente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B_\eta^X(a) \cap A) \subset B_\varepsilon(b)$$

Ou encore:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, B_\eta^X(a) \cap A \subset f^{-1}(B_\varepsilon(b))$$

On pourrait exprimer "$\exists \eta > 0, B_\eta^X(a) \cap A \subset f^{-1}(B_\varepsilon(b))$" par: $f^{-1}(B_\varepsilon(b))$ est un voisinage de a dans A.

La définition ci-dessus peut donc encore s'exprimer par:
"Pour tout voisinage V de b (dans Y), $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a dans A"

Notation:
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ a \in A}} f(x) = b$ ou $f(x) \longrightarrow_{x \to a x \in A} b$ ou $f \longrightarrow_{a,A} b$ ou $\lim\limits_{a,A} f = b$.

Remarque 4.2.

- *Si $f(a) \longrightarrow$???*

  Puisque $a \in \bar{A}^X$, il existe $x \in B^X_{min(\eta,\eta')}(a) \cap A$.
  On a: $||b - c|| = ||(b - f(x)) + (f(x) - c)|| \leq ||b - f(x)||$
  Ceci prouve $b = c$

- *Si on omet l'hypothèse $a \in \bar{A}^X$, la "définition" de la limite est triviale: la propriété énoncée est vraie quelque soit b.*

- *Si $a \in A$: a appartient à $B_\eta^X(a) \cap A$ pour tout $\eta > 0$.*
  Donc, si $f(x) \longrightarrow_{x \to a x \in A} b, f(a) \in B_\varepsilon(b)$ pour tout $a > 0$ et, par conséquent: $b = f(a)$.

Exemple:

$X = \mathbb{R}_+$ $(a = \mathbb{R})$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$ Mais $f(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \text{ si } x > 0 \\ &\quad\;\; 1 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

□

Remarque 4.3.
lim ???

Propriété 4.4.
(caractérisation séquentielle de la limite)
Soient E, F, X, Y, a, b, A, f comme ci-dessus.

1. *Les énoncés suivants sont équivalents:*
   i $f(x) \longrightarrow_{x \to a x \in A} b$
   ii *Pour toute suite* $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, [(u_n \longrightarrow_{n \to +\infty} a) \implies f(u_n) \longrightarrow_{n \to +\infty} b]$
2. *Les énoncés suivants sont équivalents:*
   (a) $f(x)$ *admet une limite quand x tend vers a par valeurs dans A.*
   (b) *Pour toute suite* $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, [(u_n \longrightarrow_{n \to +\infty} a) \implies (f(u_n))_n$ *converge*$]$

Démonstration:

1.
   - $[i \implies ii]$ On suppose $f(x) \longrightarrow_{x \to a x \in A} b$.
   Soit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow_{n \to +\infty} a$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $f(B_\eta^X(a) \cap A) \subset B_\varepsilon(b)$
   Puis $N \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq N, u_n \in B_\eta^X(a)$.
   Il vient, pour $n \geq N$: $u_n \in B_\eta^X(a) \cap A$ donc $f(u_n) \in B_\varepsilon(b)$
   On a prouvé: $f(u_n) \longrightarrow_{n \to +\infty} b$
   - $[ii \implies i]$ Suppossons i faux.
   Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que: $\forall \eta > 0, f(B_\eta^X(a) \cap A) \not\subset B_\varepsilon(b)$
   En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^8$, il existe $u_n \in B_{\frac{1}{n}}^X(a) \cap A$ tel que $f(u_n) \notin B_\varepsilon(b)$.
   On a donc construit $(u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que: $u_n \longrightarrow_{n \to +\infty} a$ et $f(u_n) \not\longrightarrow_{n \to +\infty} b$
2.
   - $[i \implies ii]$ Immédiat d'après 1
   - $[ii \implies i]$ Supposons ii.
   Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telles que: $u_n \to a, b_n \to a$.
   Par ii, $(f(u_n))_n, (f(v_n))_n$ convergent (dans Y).
   Posons $c = \lim f(u_n), d = lim f(v_n)$.
   En appliquant ii à la site $(u_0, v_0, u_1, v_1, ...)$, on voit que $(f(u_0), f(v_0), f(u_1), f(v_1), ...)$converge et donc $c = d$. On termine par 1.

□

Propriété 4.5.
(composition des limites)
E, F, G *evn.*
$X \subset E, Y \subset F, Z \subset G.$
$f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ *des apllication.*
$A \subset X, a \in \bar{A}.$
$B \subset Y$ *telle que* $f(A) \subset B.$
$b \in Y, c \in Z.$
Si $f(x) \to b$ *alors* $b \in \bar{B}.$
Si en outre $g(y) \to c$ *alors* $(g \circ f)(x) \to c$

Démonstration:

- $b \in \bar{B}$: exercice
- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $g(B_\alpha^X(b) \cap B) \subset B_\varepsilon(c)$.
  Puisqu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(B_\eta^X(a) \cap A) \subset B_\alpha^Y(a)$,
  on a: $f(B_\eta^X(a) \cap A) \subset B_\alpha^Y(a) \cap B$ car $f(A) \subset B$.
  Donc: $g \circ f(B)\eta^X(a \cap A) \subset B_\varepsilon(c)$.
  On a prouvé: $g \circ f(x) \to c$

□

Définition 4.6.
Soient E, F *evn,* $X \subset E, Y \subset F.$
Soit $f: X \longrightarrow Y.$
On dit que f *est continue si l'image réciproque par* f *d'un ouvert de* Y *est un ouvert de* X.

ATTENTION: Ne pas confondre avec l'hypothèse "l'image d'un ouvert de X est un ouvert de Y" (lorsque f la vérifie, on dit que f est ouverte)

Propriété 4.7.
Soit $f: X \longrightarrow Y.$
f *est continue* $\iff \forall a \in X, f(x) \to f(a)^{(*)}$
$\iff \forall a \in X, f(x)$ *converge quand* x *tend vers* a *(par valeurs dans* X*)*
$^{(*)}$ *sous réserve que* a *ne soit pas un point isolé de* X.

Démonstration:

- $\Longrightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$.
  $f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$ est un ouvert par continuité de f.
  Comme $a \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$, c'est un voisinage de a et il existe $\eta > 0$ tel que $B_\eta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(a)))$.
  ie: $f(B_\eta(A)) \subset B_\varepsilon(f(a))$
- <== Soit V un ouvert de Y,
  Pour tout $a \in f^{-1}(V)$, V est un voisinage de $f(a)$. Donc $f^{-1}(V)$ est une voisinage de a.
  Donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de chacun de ses points: c'est un ouvert.

$\square$

Propriété 4.8.
Soit $f\colon X \longrightarrow Y$.
f *est continue* $\Longleftrightarrow$ *l'image réciproque d'un fermé de* Y *est un fermé de* X.

Démonstration:

- $\Longrightarrow$ Soit F un fermé de Y.
  $f^{-1}(F) = {}^c f^{-1}({}^c F)$ est un fermé de X.
- <== idem

$\square$

Exemple:

Soit $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
$\{x \in X, f(x) > a\} = f^{-1}(]a, +\infty[)$ est un ouvert
$\{x \in X, f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, +\infty[)$ est un fermé
$\{x \in X, f(x) = a\} = f^{-1}(\{a\})$ est un fermé $\square$

???

Propriété 4.9.
Soient E, F *deux evn.*
Notons $\mathcal{L}_c(E, F)$ *l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* F.

- $\mathcal{L}_c(E, F)$ *est un sev de* $\mathcal{L}(E, F)$

- *On pose pour f dans $\mathcal{L}_c(E,F)$,*
  $|||f||| = inf\{k \geq 0, \forall x \in E, ||f(x)||_F \leq k||x||_E\}$
  $= sup_{x \in E \setminus \{0\}} \left(\dfrac{||f(x)||_F}{||x||_E} \right)$
  $|||.|||$ *est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. (qu'on appelle norme subordonnée à $||.||_E$ et $||.||_F$, ou encore norme induite par $||.||_E$ et $||.||_F$)*

Remarque 4.10.

- *Pour tout $x \in E$, on a:*
  $\forall k > |||f|||, ||f(x)||_F \leq k||x||_E$
  Donc : $||f(x)||_F \leq |||f||| \times ||x||_E$
  Le borne inférieure ci-dessus est donc un min.

- *À contrario, le sup ci-dessus n'est généralement pas un max.*

Exemple:

Soient N_1 et N_2 deux normes sur E et $f\colon (E,N_1) \longrightarrow (E,N_2)$
$x \longmapsto x$
f continue signifie: $\exists k \leq 0, \forall x \in E, N_2(f(x)) \leq kN_1(x)$
ie: $\exists k \leq 0, \forall x \in E, N_2(x) \leq kN_1(x)$
$|||f|||$ est ici le "meilleur" A vérifiant: $\forall x, N_2(x) \leq AN_1(x)$
$|||.|||$ n'est pas au programme. Les auteurs de problèmes n'ont cependant pas de scrupules à la définir en début d'énoncé. □

Démonstration:

- $0 \in \mathcal{L}_c(E,F)$

- $\forall f,g \in \mathcal{L}_c(E,F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.f + g \in \mathcal{L}_c(E,F)$
  Donc $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sev de $\mathcal{L}(E,F)$.

- Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$.
  $|||f||| \geq 0$ et $|||f||| = 0 \implies \forall x \in E, ||f(x)||_F \leq 0||x||_E$
  $\implies f = 0$

- Soit $f \in \mathcal{L}_c(E,F), \lambda \in \mathbb{K}$
  $|||\lambda f||| = sup_{x\neq 0}\frac{||\lambda f(x)||_F}{||x||_E} = |\lambda| sup_{x \neq 0}\frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = |\lambda| \times |||f|||$

- Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$.
  On a, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} ||(f+g)(x)||_F &\leq ||f(x)||_F + ||g(x)||_F \\ &\leq |||f||| \times ||x||_E + |||g||| \times ||x||_E \\ &\leq (|||f||| + |||g|||)||x||_E \end{aligned}$$

  On a donc: $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$.

□

Exercice:

On munit $\mathbb{R}^n$ de $||.||_\infty$.
On identifie $\mathbb{R}^n$ à $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ à $M_n(\mathbb{R})$.
Quelle est la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à $||.||_\infty$?
$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j \leq n}$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x1 + ... + a_{1n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x1 + ... + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$
Soit $i \in [\![1, n]\!]$:
$$\begin{aligned} |a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n| &\leq |a_{i1}||x_1| + ... + |a_{in}||x_n| \\ &\leq (|a_{i1}| + ... + |a_{in}|)||X||_\infty \end{aligned}.$$
Donc: $||AX||_\infty \leq [max_{1\leq i \leq n}(|a_{i1}| + ... + |a_{in}|)]\,||X||_\infty$
Soit i_0 tel que: $\forall i, |a_{i1}| + ... + |a_{in}| \leq |a_{i_01}| + ... + |a_{i_0n}|$
Notons $X_0 = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i,j} \geq 0$ et $\varepsilon_j = -1$ si $a_{i,j} < 0$.
On a: $||AX_0||_\infty = |a_{i_01}| + ... + |a_{i_0n}|$.
Ceci prouve: $|||A||| = max_{1\leq i\leq n}(|a_{i1}| + ... + |a_{in}|)$ □

Exercice:

Idem en remplacant $||.||_\infty$ par $||.||_1$ □

Propriété 4.11.
E, F, G evn, $F \in \mathcal{L}_c(E, F), g \in \mathcal{L}_c(F, G)$.
On a: $|||f \circ g||| \leq |||g||| \times |||f|||$

Démonstration:

$$\begin{aligned}\forall x \in E, ||g \circ g(x)|| &\leq |||g||| \times ||f(x)|| \\ &\leq |||g||| \times |||f||| \times ||x||\end{aligned}$$

Donc $|||f \circ g||| \leq |||g||| \times |||f|||$. □

Remarque 4.12.
Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, f bijective et f^{-1} est continue.
On a: $|||f \circ f^{-1}||| = 1$ donc $|||f||| \times |||f^{-1}||| \geq 1$

Exemple:

Soitent N_1 et N_2 deux normes non équivalentes sur un ev E telles que:
$\exists A, \forall x \in E, N_2(x) \leq AN_1(x)$.
Alors: $id\colon \begin{array}{l}(E, N_1) \longrightarrow (E, N_2) \\ x \longmapsto x\end{array}$ est continue mais sa réciproque n'est pas continue. □

Définition 4.13.
Soient E, F, G des $K-ev$ (K corps quelconque).
Soit $B\colon E \times F \longrightarrow G$.
On dit que B est bilinéaire si:

$$\begin{cases} \forall a \in E,\ \begin{array}{l} F \longrightarrow G \\ y \longmapsto B(a, y)\end{array} & \textit{est linéaire} \\ \forall b \in F,\ \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto B(x, b)\end{array} & \textit{est linéaire}\end{cases}$$

ATTENTION: B linéaire est différent de B bi-linéaire.

- B linéaire signifie: $\forall \lambda \in K, \forall (x, y), (x', y') \in E \times F, B(\lambda(x, y) + (x', y')) = \lambda B(x, y) + B(x', y')$.
  ie: $B(\lambda x + x', \lambda y + y') = \lambda B(x, y) + B(x', y')$.
- B bi-linéaire: $\forall \lambda\mu \in K, \forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, B(\lambda x + x', \mu y + y') = \lambda\mu B(x, y) + \lambda B(x, y') + \mu B(x', y) + N(x', y')$

Exemple:

- $\begin{array}{l} K \times K \longrightarrow K \\ (x, y) \longmapsto xy\end{array}$

- $K^n \times K_m \longrightarrow K$ (où $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,m]\!]$)
  $(x,y) \longmapsto x_i y_j$
- $K^n \times K_m \longrightarrow K$
  $(x,y) \longmapsto \sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij}x_i y_j$

□

Exercice:

Vérifier qu'on a là toutes les applications bi-linéaires de $K^n \times K^m$ dans K □

Exemple:

- Les applications tri-linéaires de $Kn \times K_m \times K^s$ dans K sont de la forme:
  $(x,y,z) \longmapsto \sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq s}} a_{ijk}x_i y_j z_k$

□

Propriété 4.14.
Soient E, F, G trois evn.
Soit $B\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bi-linéaire.
B est continue ssi il existe $k \geq 0$ tel que:
$\forall (x,y) \in E \times F, ||B(x,y)||_G \leq k||x||_E||y||_Y$

Exercice:

Le démontrer □