Fractions Rationnelles
Fonctions fraction Rationnelles

MPSI 2

Soit $F = \frac{P}{Q}$ où $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*, P \wedge Q = 1$
On note $p = \deg(Q)(\in \mathbb{N})$.
On pose $\mathcal{D}_F \left\{ x \in \mathbb{K}, \widetilde{Q}(x) \neq 0 \right\}$
$\mathcal{D}_F$ est l'ensemble $\mathbb{K}$ prive d'un nombre fini d'éléments.

Définition 0.0.1

- *On note* $\widetilde{F} \colon \mathcal{D}_F \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$$

  $\widetilde{F}$ *s'appelle la fonction fraction rationnelle associée à* F.
- *Un élément* $x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{D}_F$ *est un pôle de* F.
- *Un élément* $x \in \mathcal{D}_F, \widetilde{P}(x) = 0$ *s'appelle une racine de* F.

Propriété 0.0.1
On note E *l'ensemble des fraction rationnelles à coefficients dans* $\mathbb{K}$.
Soit $\psi \colon \mathbb{K}(X) \longrightarrow E$

$$F \longmapsto \widetilde{F}$$

- ψ *est surjective.*
- *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps infini, alors* ϕ *est injective.*

- ψ est surjective par définition de E.
- Pour montrer que si E est infini, ψ est injective, on utilise le fait que $\frac{\widetilde{P}_1}{\widetilde{Q}_1} = \frac{\widetilde{P}_2}{\widetilde{Q}_2} \iff \widetilde{P}_1\widetilde{Q}_2 = \widetilde{P}_2\widetilde{Q}_1$ puis on montre que $P_1Q_2 - P_2Q_1$ est le polynome nul en montrant qu'il possède une infinité de racines.

$\square$