Fractions Rationnelles
Généralités
MPSI 2

On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractionnelles sur $\mathbb{K}$ (le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$).
L'existence et la construction de $\mathbb{K}(X)$ sont admises.

- Soit $(P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X]^2, (P_2, Q_2) \in \mathbb{K}[X]^2, Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$
  - $\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2+P_2Q_1}{Q_1Q_2}$ Elément neutre : $\frac{0}{Q}$
  - $\frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$ Elément unité : $\frac{Q}{Q}$
  - $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \iff P_1Q_2 = P_2Q_1$

    On dit que (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) sont deux représentants de la même fraction.
- On a $\mathbb{K} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{K}[X] \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{K}(X)$ "iota"

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{K} &\longrightarrow K[X] && \text{est un homomorphisme d'anneaux injectif} \\ \lambda &\longmapsto (\lambda, 0, 0, \ldots) \\ \iota\colon \mathbb{K} &\longrightarrow K[X] && \text{est un homomorphisme d'anneaux injectif} \\ P &\longmapsto \frac{P}{1} \end{aligned}$$

- Forme irréductible d'une fraction rationnelle :

$\frac{P}{Q}$ où $\begin{cases} P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X], Q \neq 0 \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ est unitaire} \end{cases}$

Propriété 0.0.1
Toute fraction rationnelle de $\mathbb{K}[X]$ peut être mise de manière unique sous forme irréductible.

- **Existence :** Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$
  $D = \text{pgcd}(P, Q)$
  Alors $\exists (P_1, Q_1) \in \mathbb{K}[X]^2, P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ et $P_1 \wedge Q_1 = 1$
  On a : $\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$
  Soit λ le coefficient dominant de Q_1.
  Alors $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et : $\exists Q_2 \in \mathbb{K}[X], Q_1 = \lambda Q_2$ et Q_2 est unitaire

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\lambda(\lambda^{-1}P_1)}{\lambda Q_2} = \frac{\lambda^{-1}P_1}{Q_2}$$

  Posons $P_2 = \lambda^{-1}P_1$.
  $P_2 \wedge Q_2 = 1$ car $P_1 \wedge Q_1 = 1$.
  Finalement, le couple (P_2, Q_2) convient.

- **Unicité :** Supposons qu'il existe deux formes irréductibles (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) d'une même fraction.

  Alors : $\begin{cases} P_1 \wedge Q_1 = 1 \\ P_2 \wedge Q_2 = 1 \\ Q1, Q2 \text{ unitaires} \\ P_1Q_2 - P_2Q_1 = 0 \end{cases}$

  $P_1Q_2 = P_2Q_1$ En utilisant un théorème de GAUSS, on obtient : $\begin{cases} Q_2 | Q_1 \\ Q_1 | Q_2 \end{cases}$

  Donc Q_1 et Q_2 sont des polynomes associés. Comme Q_1 et Q_2 sont unitaires, on en déduit que $Q_1 = Q_2$, d'où l'unicité de l'écriture.

  □

Définition 0.0.1
Soit $F \in \mathbb{K}[X] : \exists (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, Q \neq 0$ *et* $F = \frac{P}{Q}$
On pose : $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$

Justification : Soit (P, Q) et (P', Q') deux représentants de F.
Alors $PQ' = P'Q$
Donc : $\deg(P) + \deg(Q) = \deg(P') + \deg(Q')$
D'où : $\deg(P) - \deg(Q') = \deg(P') - \deg(Q)$

Propriété 0.0.2
Soit F_1 *et* F_2 *deux éléments de* $\mathbb{K}[X]$*. On a :*

$$\begin{aligned} & \deg(F_1 + F_2) \leq \mathrm{Max}(\{\deg(F_1), \deg(F_2)\}) \\ \textit{Si } \deg F_1 \neq \deg F_2 \textit{ alors } & \deg(F_1 + F_2) = \mathrm{Max}(\{\deg(F_1), \deg(F_2)\}) \\ & \deg(F_1F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2) \end{aligned}$$