Espaces Vectoriels de Dimension finie
Espaces Vectoriels

MPSI 2

1 Structure d'espace vectoriel

Soit E un ensemble non vide.

Définition 1.0.1
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si:
- *$(E, +)$ est un groupe abélien.*
- *$\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ est un loi interne telle que:*

  $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$

  $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:
  - $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
  - $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
  - $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$
  - $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Règles de calcul dans un espace vectoriel:
- $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$
- $\lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x)$
- $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$

2 Sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}_{\text{EV}}$, soit F un sous-ensemble non vide de E.

Définition 2.0.2
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si il est stable par les lois de E et si, muni des restrictions de ces lois, F est un $\mathbb{K}_{EV}$

Critères de S_{EV}
- Critère 1: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par les lois de E.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda \cdot x \in F$
- Critère 2: F est un S_{EV} de E si il est non vide et stable par combinaison linéaire.
  - $0_E \in F$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$

Définition 2.0.3
On appelle espace vectoriel engendré par A le plus petit espace vectoriel contenant A.

Notation: $\mathrm{Vect}(A)$

Justification
Soit $\mathcal{F} = \{F \subset E,\ F\ \mathrm{S_{EV}}$ de E et $A \subset F\}$
- $F_0 = \bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F$ est un $\mathrm{S_{EV}}$ de E, et contient A: $\forall F \in \mathcal{F},\ A \subset F$
  D'où $F_0 \in \mathcal{F}$
- Par définition de F_0, c'est le plus petit élément de $\mathcal{F}$.

Donc F_0 existe.

3 Dépendance linéaire

Définition 3.0.4
$\{X_1,\ \ldots\ , X_p\}$ *est un système libre ssi:*

$$\forall(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i = 0_E\right) \Rightarrow (\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}})$$

Définition 3.0.5
$\{X_1,\ \ldots\ , X_p\}$ *est un système lié ssi:*

$$\exists(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i = 0_E\right)\ \text{et}\ (\exists i \in [\![1,p]\!], \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}})$$

Propriété 3.0.1
Soit $A = \{X_1, X_2,\ \ldots\ , X_p\}$ une partie finie de E.
Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de A.

Soit B l'ensemble des combinaisons linéaires de A:
$B = \left\{x \in E,\ \exists(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot X_i\right\}$
Montrer que B est un $\mathrm{S_{EV}}$ de E.

- $0_E \in B : \sum_{i=1}^{p} 0_{\mathbb{K}} X_i = 0_E$
- B est stable par combinaison linéaire.

Donc B est un S_{EV} de E.

B contient A:

Soit $i_0 \in [\![1, p]\!]$

$X_{i_0} = (\delta_i^{i_0})_{i_0 \in [\![1,p]\!]}$

D'où $X_{i_0} \in B$.

Valable pour tout i_0 de $[\![1, p]\!]$,

Donc $A \subset B$

Reste à montrer que B est le plus petit S_{EV} de E contenant A.

Soit F un S_{EV} de E contenant A.

F est stable par CL et contient A.

Donc F contient B.

$\square$

Définition 3.0.6
$\{X_1, \dots, X_p\}$ *est un* <u>*système générateur de E*</u> *si* $\mathrm{Vect}(\{X_1, \dots, X_p\}) = E$

Définition 3.0.7
La famille $(X_1, \dots, X_p)$ *est une* <u>*base de E*</u> *si* $\{X_1, \dots, X_p\}$ *est libre et générateur de* E.

4 Applications linéaires

Définition 4.0.8
Soient E et F deux $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$.
Soit $f : E \to F$
On dit que f est un <u>*homomorphisme d'EV*</u> *de E dans F ou* <u>*application linéaire*</u> *de E dans F si:*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$$

Définition 4.0.9

- *f est un endomorphisme si $(F,+,\cdot) = (E,+,\cdot)$ et si f est un homomorphisme d'EV.*
- *f est un isomorphisme d'EV si f est un homomorphisme d'EV bijectif.*
- *f est un automorphisme d'EV si f est un endomorphisme bijectif.*
- *f est une forme linéaire sur E si $(f,+,\cdot) = (\mathbb{K},+,\cdot)$ et f est un homomorphisme d'EV.*

Remarques:
- Si f est un isomorphisme d'EV, alors f^{-1} l'est aussi.
- $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Définition 4.0.10
Soient E et F deux $\mathbb{K}_{\mathrm{EV}}$.
Soit $f : E \to F$
- *L'image de f:* $\mathrm{Im}(f) = f(E)$
- *Le noyau de f:* $\ker(f) = f^{-1} < \{0_F\} >$

Propriété 4.0.2
$\mathrm{Im}(f)$ *et* $\ker(f)$ *sont des* S_{EV} *de F et E respectivement.*

Propriété 4.0.3
Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- *Si $(X_1, \ldots, X_p)$ est lié, alors $(f(X_1), \ldots, f(X_p))$ est lié.*
- *Par contraposée, si $(f(X_1), \ldots, f(X_p))$ est libre, alors $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre.*
- *Si $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre et f est injective, alors $(f(X_1), \ldots, f(X_p))$ est libre.*

Application des propriétés $\square$

Propriété 4.0.4

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- *Si $(X_1, \ \dots \ , X_p)$ est une famille génératrice de E, alors $(f(X_1), \ \dots \ , f(X_p))$ est génératrice de $f(E)$.*
- *Si f est surjective, alors l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F (car $f(E) = F$).*