

Fonctions Numériques

Relations de comparaison

MPSI 2

Soit x_0 un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 0.0.1

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 .

On dit que f est négligeable devant g si il existe une application $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:

$$\begin{cases} \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ x \in V \\ \forall x \in V \setminus \{x_0\}, |f(x)| < \varepsilon(x) |g(x)| \end{cases}$$

Notation: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$

Résultats usuels:

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\alpha)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$

Définition 0.0.2

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 .

On dit que f est dominée par g si:

$$\exists M \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in V \setminus \{x_0\}, |f(x)| < M |g(x)|$$

Notation: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g(x))$

Définition 0.0.3

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage V de x_0 , sauf éventuellement en x_0 .

On dit que f et g sont équivalentes en x_0 si il existe une application $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \\ x \in V \\ \forall x \in V \setminus \{x_0\}, f(x) = h(x) g(x) \end{cases}$$

Notation: $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$

Résultats usuels en 0:

- $\sin(x) \sim x$, $\cos(x) \sim 1$, $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan(x) \sim x$
- $\arcsin \sim x$, $\arctan(x) \sim x$
- $\ln(1+x) \sim x$, $(1+x)^\alpha \sim 1$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- $\operatorname{sh}(x) \sim x$, $\operatorname{ch}(x) \sim 1$, $\operatorname{th}(x) \sim 1$, $\operatorname{ch}(x) - 1 \sim \frac{x^2}{2}$

Propriété 0.0.1

Opérations sur les équivalences

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 telles que $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$.

- Si ϕ est une fonction ne s'annulant pas au voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 ,
Alors $f(x) \phi(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \phi(x)$
- Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$, alors $f(x) f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) g_1(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(f(x))^n \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^n$
- Si f_1 ne s'annule pas au voisinage de x_0 , sauf éventuellement en x_0 , et si $f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)$
Alors $\frac{f(x)}{f_1(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g(x)}{g_1(x)}$
- Si f ne s'annule pas au voisinage de x_0 , alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(f(x))^n \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^n$

Propriété 0.0.2

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l \in \overline{\mathbb{R}}$,
Alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$
- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ et $l \in \mathbb{R}^*$,
Alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$