

Fonctions Numériques

Opérations sur les fonctions

MPSI 2

1 Opérations sur les fonctions admettant des limites

1.1 Limites finies

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $x \in I$ ou que x soit une extrémité de I .

- $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} 0 \iff |f(x)| \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} 0$
- Si $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l$ et si $g(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l'$,
Alors $(f + g)(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l + l'$
- Si $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} 0$ et si g est bornée au voisinage de x_0 ,
Alors $(f \times g)(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} 0$
- Si $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l$ et $g(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l'$,
Alors $(f \times g)(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l \times l'$
- Si $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} l$ et $l \neq 0$,
Alors $\frac{1}{f}$ existe au voisinage V de x_0 , et $\frac{1}{f(x)} \underset{x \in V}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} \frac{1}{l}$

1.2 Limites infinies

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $x \in I$ ou que x soit une extrémité de I .

- Si $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} +\infty$ et si g est minorée au voisinage de x_0 ,
Alors $(f + g)(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} +\infty$
- Si $f(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} +\infty$ et si g est minorée par un réel strictement positif au voisinage de x_0 ,
Alors $(f \times g)(x) \underset{x \in I}{\xrightarrow{x \rightarrow x_0}} +\infty$

1.3 Composition de limites

Soient I et J deux intervalles.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $x_0 \in I$ ou que x_0 soit une extrémité de I .

Soit $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $y_0 \in J$ ou que y_0 soit une extrémité de J .

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} y_0 \\ g(y) \xrightarrow[y \in J]{y \rightarrow y_0} l \end{array} \right. \implies (g \circ f)(x) \xrightarrow[x \in I]{x \rightarrow x_0} l$$

2 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 2.0.1

Soit I un intervalle réel non vide.

L'ensemble des applications continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$
 $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

Montrer que:

- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est non vide.
- $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire.

□

Propriété 2.0.2

- Si f et g sont continues en x_0 , alors $f \times g$ est continue en x_0 .
- Si $g(x_0) \neq 0$ et si g est continue en x_0 , alors $\frac{1}{g}$ a un sens au voisinage de x_0 et $\frac{1}{g}$ est continue en x_0 .
- Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ a un sens au voisinage de x_0 , et $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .

Corollaire 2.0.1

- Si f est continue en x_0 , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n est continue en x_0 .
- Si de plus, $f(x_0) \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, f^n est continue en x_0 .

Par conséquence, toutes les fonctions polynomiales sont continues sur \mathbb{R} .
De plus, les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriété 2.0.3

Si f est continue sur I , et si g est continue sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est continue sur I .