Fonctions Numériques
Généralités

MPSI 2

Définition 0.0.1
On appelle Fonction numérique *toute application de* $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}, G)$ *où:*
- I *est un intervalle réel.*
- G *est un graphe de* I *dans* $\mathbb{R}$ *associé a cette application.*

On écrit $f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)$

Notation: $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de I vers $\mathbb{R}$.

1 Opérations

Soit f et g deux fonctions numérique définies sur I.
On pose : • $f + g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) + g(x)$
• $f \times g \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x) \times g(x)$
•$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \dot{f} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \lambda \times f(x)$

On définit ainsi deux lois internes et une loi externe: $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ +,\ \times,\ \dot{})$ est une algèbre commutative.
Cela signifie que : • $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif.
•$(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}),\ +,\ \dot{})$ est un espace véctoriel.
•$\forall (f, g, \lambda) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})^2 \times \mathbb{R},\ \lambda \dot{(} f \times g) = (\lambda \dot{f}) \times g = f \times (\lambda \dot{g})$

Notations:
- $0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})}$ désigne l'application $: I \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto 0$
- Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on note $-f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto -f(x)$
- Si $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in I,\ f(x) \neq I$,
  Alors on note $\dfrac{1}{f} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto \dfrac{1}{f(x)}$

2 Relation d'ordre

Définition 2.0.2
Soit f et g deux fonctions numériques définies sur I.
On note $f \leqslant g \iff \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$

On définit alors une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Définition 2.0.3

- *On dit que f est positive sur I si:*
  $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$
  On note alors $f \geqslant 0$
- *On procède de manière analogue pour* $f > 0$

Propriété 2.0.1
Soit $f_1,\ f_2,\ g_1,\ g_2$ des fonctions numériques définies sur I.
- $f_1 \leqslant f_2$ *et* $g_1 \leqslant g_2 \Longrightarrow f_1 + g_1 \leqslant f_2 + g_2$
- $(g_1 \geqslant 0$ *et* $f_1 \geqslant f_2) \Longrightarrow f_1 \times g_1 \leqslant f_2 \times g_1$

Cela découle du fait que $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ soit un corps totalement ordonné. □

Définition 2.0.4
Soit f une fonction numérique définie sur I.
On pose

$$f^+ : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad f^- : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

f^+ et f^- sont les parties positive et négative de f.

Remarques:
- f^+ et f^- sont toutes deux positives.
- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$

Définition 2.0.5
Soit f une fonction numérique définie sur I.
L'image de f, $F(I)$, est l'ensemble :
$f(I) = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in I, f(x) = y\}$

Définition 2.0.6
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- *On dit que $\underline{f \text{ est bornée sur } I}$ si $f(I)$ est borné.*
  $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ f(I) \subset [a, b]$
- *On dit que $\underline{f \text{ est majorée sur } I}$ si $f(I)$ est majoré.*
  $\exists K \in \mathbb{R},\ f \leqslant K$
- *On dit que $\underline{f \text{ est minorée sur } I}$ si $f(I)$ est minoré.*
  $\exists k \in \mathbb{R},\ k \leqslant f$

Définition 2.0.7
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
- *Si f est majorée sur I, on appelle borne supérieure de f sur I la borne supérieure de $f(I)$*
- *Si f est minorée sur I, on appelle borne inférieure de f sur I la borne inférieure de $f(I)$*

Notation: $\operatorname*{Sup}_{x \in I} f(x) = \operatorname*{Sup}_{I} f = \operatorname{Sup}(f(I))$
$\operatorname*{Inf}_{x \in I} f(x) = \operatorname*{Inf}_{I} f = \operatorname{Inf}(f(I))$

Définition 2.0.8
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Soit J un sous-ensemble de I.
Soit x_0 un élément de J.
- *f admet un maximum en x_0 sur J si: $\forall x \in J,\ f(x) leqslant f(x_0)$*
- *f admet un minimum en x_0 sur J si: $\forall x \in J,\ f(x_0) leqslant f(x)$*
- *f présente un extremum en x_0 sur J si f admet un minimum ou un maximum en x_0 sur J.*

3 Autres propriétés

3.1 Périodicité

Définition 3.1.1
Soit f une fonction numérique définie sur I.
Soit p un réel.
On dit que p est une période de f si:
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \Rightarrow x+p \in I \\ \forall x \in I,\ f(x+p) = f(x) \end{cases}$$

Notons G_f l'ensemble des périodes de f:
$G_f = \{p \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x+p) = f(x)\}$
Alors G_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

3.2 Parité

Définition 3.2.1
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- *f est paire sur I si:* $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \Rightarrow -x \in I \\ \forall x \in I,\ f(x) = f(-x) \end{cases}$
- *f est impaire sur I si:* $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \Rightarrow -x \in I \\ \forall x \in I,\ f(x) = -f(-x) \end{cases}$

Définition 3.2.2
Soit I un intervalle centré en 0.
Soit f une application définie sur I a valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note $P\colon \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x) = f(-x)}{2} \end{array}$ *et* $Imp\colon \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array}$
P et Imp sont les parties Paire et Impaire de f.

Propriété 3.2.1
$f = P + Imp$

3.3 Fonctions k-Lipschitziennes

Définition 3.3.1
Soit f une fonction numérique définie sur I.
Soit k un réel positif.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si:
$\forall (x,x') \in I^2,\ |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$