Dénombrements
Proprités des coefficients binomiaux

MPSI 2

Propriété 0.0.1
$\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Propriété 0.0.2
Triangle de Pascal
$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$

Propriété 0.0.3
Généralisation du triangle de Pascal
$\sum\limits_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Propriété 0.0.4
Formule du binôme
Soit A est un anneau, et a et b deux éléments de A qui commutent.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Alors $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Propriété 0.0.5
Formule de Vandermonde
$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$

- $\binom{n+m}{p}$ est le coefficient du terme de degré p dans $(1+x)^{n+m}$
- $$\begin{aligned}(1+x)^{n+m} &= (1+x)^n\,(1+x)^m \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{x}x^k\right)\,\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{x}x^k\right) \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]}\binom{n}{i}\,\binom{m}{j}\,x^i\,x^j\end{aligned}$$

  On veut procéder par identification, on réécrit donc la somme:

  $$\begin{aligned}(1+x)^{n+m} &= \sum_{p=0}^{n+m}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}x^p \\ &= \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}\right)x^p\end{aligned}$$

  D'où le coefficient du terme de degré p.
  N.B. Les termes limites de la somme sont nuls.

□