

Dénombrements

Opérations sur les cardinaux

MPSI 2

Propriété 0.0.1

Soit E et F deux ensembles finis de cardinal n et p respectivement.
Alors $E \times F$ est fini et son cardinal est np

Remarque: On démontre par récurrence le cardinal de $E_1 \times \dots \times E_n$

Soit deux applications bijectives f et g telles que $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ et $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow F$

Soit $\phi : \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow E \times F$

$$(i, j) \mapsto (f(i), g(j))$$

ϕ réalise une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ sur $E \times F$ car f et g sont bijectives.

Reste à construire une bijection de $\llbracket 1, np \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

Soit $\psi : \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, np \rrbracket$

$$(i, j) \mapsto (i-1)p + j$$

Montrons que ψ est bijective.

Application réciproque.

Soit $k \in \llbracket 1, np \rrbracket$

1^{er} cas: $p|k$

Donc $\exists q \in \llbracket 1, n \rrbracket, k = qp$

Alors $i = q$ et $j = p$.

2^{ème} cas: k n'est pas multiple de p .

Division euclidienne de k par p :

$$\exists (q, r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} k = qp + r \\ 0 \leq r < p \end{cases}$$

Alors $i = q + 1$ et $j = r$

D'après ces résultats, soit $\gamma : \llbracket 1, np \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

$$k \mapsto \begin{cases} (q, p) & \text{si } k = qp \\ (q+1, p) & \text{si } k = qp + r \text{ et } r \neq 0 \end{cases}$$

On vérifie que : ψ est à valeurs dans $\llbracket 1, np \rrbracket$

γ est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$

$\psi \circ \gamma = \text{Id}_{\llbracket 1, np \rrbracket}$ et $\gamma \circ \psi = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$

Conclusion: $\phi \circ \gamma$ réalise une bijection de $\llbracket 1, np \rrbracket$ sur $E \times F$, d'où $E \times F$ est un ensemble fini de cardinal np □

Propriété 0.0.2

Soit A et B deux sous-ensembles finis et disjoints d'un ensemble E .

Alors $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

Corollaire 0.0.1

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints d'un ensemble E .

Alors $\bigcap_{i=1}^n (A_i)$ est fini et $\text{card}\left(\bigcap_{i=1}^n (A_i)\right) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k)$

Corollaire 0.0.2

Soit A et B deux sous-ensembles finis d'un ensemble E .

Alors $A \cup B$ est fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

Il existe deux bijections: $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow A$ et $g : \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow B$

Soit $\phi : \llbracket 1, n+p \rrbracket \rightarrow A \cup B$

$$i \mapsto \begin{cases} f(i) & \text{si } i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ g(n-i) & \text{si } i \in \llbracket n+1, n+p \rrbracket \end{cases}$$

ϕ est bien définie, car f l'est sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et g sur $\llbracket 1, p \rrbracket$.

ϕ est à valeurs dans $A \cup B$ car f est à valeurs dans A et g dans B .

Montrer que ϕ réalise une bijection de $\llbracket 1, n+p \rrbracket$ sur $A \cup B$.

- ϕ est surjective car f et g le sont.

- Montrer que ϕ est injective.

Soit $(i, i') \in \llbracket 1, n+p \rrbracket^2$ tel que $\phi(i) = \phi(i')$

1^{er} cas: $f(i) = f(i')$

Alors $i = i'$ car f est injective.

2^{ème} cas: $g(i-n) = g(i'-n)$

Alors $i = i'$ car g est injective.

3^{ème} cas: $f(i) = g(i-n)$

Impossible car f est à valeurs dans A et g dans B et $A \cap B = \emptyset$

□

Par récurrence.

□

Soit A et B deux ensembles finis de E .

On considère $D = C_B A \cap B$

Donc $A \cup B = A \cup B$

$B = (A \cap B) \cup D$ et cette réunion est disjointe.

Donc $\text{card}(B) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(D)$

D'où $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$ □

Propriété 0.0.3

Formule du crible ou de Poincaré

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille d'ensembles finis.

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \text{card}(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k})$$

Propriété 0.0.4

Soit E, F deux sous-ensembles tels que F soit fini.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application telle que $\exists r \in \mathbb{N}^*, \forall y \in F, \text{card}(f^{-1} \langle \{y\} \rangle) = r$

Alors E est fini et $\text{card}(E) = r \times \text{card}(F)$

Montrons que $(f^{-1} \langle \{y\} \rangle)_{y \in F}$ est une partition de E

- $\forall y \in F, f^{-1} \langle \{y\} \rangle \subset E$ et $f^{-1} \langle \{y\} \rangle \neq \emptyset$
- Si y et y' deux éléments distincts de F , alors $f^{-1} \langle \{y\} \rangle \cap f^{-1} \langle \{y'\} \rangle = \emptyset$
 En effet, supposons $f^{-1} \langle \{y\} \rangle \cap f^{-1} \langle \{y'\} \rangle \neq \emptyset$
 Soit x_0 un élément de E tel que $x_0 \in f^{-1} \langle \{y\} \rangle \cap f^{-1} \langle \{y'\} \rangle \neq \emptyset$
 Donc $f(x_0) = y$ et $f(x_0) = y'$, d'où $y = y'$ car f est une application.
 Conclusion: $\forall (y, y') \in F^2, f^{-1} \langle \{y\} \rangle \cap f^{-1} \langle \{y'\} \rangle \neq \emptyset \Rightarrow y = y'$
- Montrer que $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1} \langle \{y\} \rangle$
 - $\bigcup_{y \in F} f^{-1} \langle \{y\} \rangle \subset E$
 Par réunions de sous-ensembles de E .
 - Montrer que $E \subset \bigcup_{y \in F} f^{-1} \langle \{y\} \rangle$
 C'est à dire $\forall x \in E, \exists y \in F, x \in f^{-1} \langle \{y\} \rangle$
 Soit x un élément de E . Posons $y = f(x)$
 f a valeurs dans F donc $y \in F$ et $y = f(x)$
 Ceci est vrai pour tout x de E , donc $E \subset \bigcup_{y \in F} f^{-1} \langle \{y\} \rangle$

Donc $E = \bigcup_{y \in F} f^{-1} \langle \{y\} \rangle$

Conclusion: $(f^{-1} \langle \{y\} \rangle)_{y \in F}$ est une partition de E de sous-ensembles deux à deux disjoints.

Donc, sachant les sous-ensembles disjoints et finis, on a:

- E est un ensemble fini.

- $$\begin{aligned} \text{card}(E) &= \text{card} \left(\bigcup_{y \in F} f^{-1} \langle \{y\} \rangle \right) \\ &= \sum_{y \in F} \text{card} (f^{-1} \langle \{y\} \rangle) \\ &= \sum_{y \in F} r \\ &= r \times \text{card}(F) \end{aligned}$$

□