# Structures Algébriqes
# Structure de Groupe

MPSI 2

# 1 Définition

**Définition 1.0.1**
*Soit $(G, *)$ un magma.*
*On dit que $(G, *)$ est un groupe si:*
- *$*$ est associative*
- *$*$ admet un élément neutre*
- *tout élément de $G$ est symétrisable par $*$*

*Si de plus, $*$ est commutative sur $G$, on dit que $(G, *)$ est un groupe abélien.*

**Conséquences:**
- Règle de simplification: $a * x = a * y \Rightarrow x = y$
  Démonstration:
  Soit $a$, $x$ et $y$ trois éléments de $G$ tels que $a * x = a * y$
  Notons $a'$ le symétrique de $a$ (car $G$ est un groupe)
  On a alors: $a' * (a * x) = a' * (a * y)$
  Par associativité, on a: $(a' * a) * x = (a' * a) * y$
  Par symétrie, on a: $e * x = e * y$
  Par définition de l'élément neutre: $x = y$
- Résolution d'équations: $a * x = b \iff x = a' * b$

# 2 Sous-groupes

## 2.1 Définition et critères

Soit $(G, *)$ un groupe.

**Définition 2.1.1**
*Soit $F$ un sous-ensemble de $G$*
*On dit que $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si:*
- $\forall (x, y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
- $(F, *')$ *est un groupe où* $*'$ *est la loi induite de* $G$ *sur* $F$.

**Remarques:** Soit $(F, *')$ un sous-groupe de $(G, *)$
- $e_G = e_F$
- $F$ est non vide: $e \in F$

- Si $x'$ et $x''$ sont les symétriques de $x \in F$ dans $(G, *)$ et $(F, *')$ respectivement,
  Alors $x' = x''$

**Critères de sous-groupe**
Soit $F$ un sous-ensemble non vide de $G$.
- Critère 0: $F$ est un sous-groupe de $G$ ssi:
  ① $\forall (x, y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
  ② $e \in F$
  ③ $\forall x \in G,\ (x \in F) \Rightarrow (x^-1 \in F)$
- Critère 1: $F$ est un sous-groupe de $G$ ssi:
  ① $\forall (x, y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y \in F)$
  ② $\forall x \in G,\ (x \in F) \Rightarrow (x^-1 \in F)$
- Critère 2: $F$ est un sous-groupe de $G$ ssi:
  ① $\forall (x, y) \in G \times G,\ (x \in F \text{ et } y \in F) \Rightarrow (x * y^{-1} \in F)$

Démonstration des critères de sous-groupe
- Critère 1: Soit $F$ un sous-ensemble non vide de $G$ vérifiant le critère 1.
  D'après ②, $x^{-1} \in F$
  D'après ①, $x * x^{-1} \in F$
  Or $x * x^1 = e$, donc $e \in F$ On a vérifié le critère 0, donc $(F, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- Critère 2: Soit $F$ un sous-ensemble non vide de $G$ vérifiant le critère 2.
  - $F$ est non vide: Soit $x$ un élément de $F$
    D'après ①, $x * x^-1 \in F \Rightarrow e \in F$
    Le point ② du critère 0 est vérifié.
  - D'après ① avec $e$ et $x$: $e * x^{-1} \in F \Rightarrow x^{-1} \in F$
    Le pont ③ du critère 0 est vérifié.
  - Soit $x$ et $y$ deux éléments de $F$. De plus, $y^{-1} \in F$
    donc $x * (y^{-1})^{-1} \in F \rightarrow x * y \in F$

□

## 2.2 Propriétés des sous-groupes

Soit $(G, *)$ un groupe.

**Propriété 2.2.1**

- *Si $F$ et $H$ sont des sous-groupes de $(G, *)$,*
  *Alors $F \cap H$ est un sous-groupe de $(G, *)$.*
- *Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-groupes de $(G, *)$,*
  *Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-groupe de $(G, *)$*

- $f \cap H$ est non vide: $e \in F \cap H$
- Montrer que $\forall (x,y) \in G \times G,\ (x \in F \cap H)$ et $(y \in F \cap H) \Rightarrow (x * y^{-1}) \in F \cap H$
  Soit $(x,y) \in F \cap H$
  $x$ et $y$ sont éléments de $F$ et $F$ est un groupe: $x * y^{-1} \in F$
  De même, $x * y^{-1} \in H$
  Donc $x * y^{-1} \in F \cap H$
  Vrai pour tout $(x,y)$ de $(F \cap H)^2$, donc on en déduit que $F \cap H$ est un sous-groupe de $(G,*)$

$\square$

**Définition 2.2.1**
*Soit $(G,*)$ un groupe.*
*Soit $B$ une partie non vide de $G$.*
*On appelle <u>sous-groupe de $g$ engendré par $B$</u> le plus petit sous groupe de $(G,*)$ contenant $B$, au sens de l'inclusion.*

**Justification:** On munit $\mathcal{P}(G)$ de la relation d'inclusion: $(\mathcal{P}(G), \subset)$ est un ensemble ordonné.
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des groupes contenant $B$.
- $\mathcal{F}$ est non vide car $G \in \mathcal{F}$
- D'après la propriété précédente, $H = \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$ est un sous-groupe de $(G,*)$.
  $\forall f \in \mathcal{F},\ b \subset F$, donc $B \subset H$
- Reste à montrer que $H$ est le plus petit élément de $\mathcal{F}$
  Donc montrer que $\forall F \in \mathcal{F},\ H \subset F$
  Par définition de $H$, la proposition précédente est vraie.

**Notation:**
- $< B >$
- Si $B$ est un singleton $b = \{b\}$, on écrit $< b >$

## 2.3 Morphismes de groupes

Soit $(G, *)$ et $(G', *')$ deux groupes.
Soit $f : G \to G'$ une application.

**Définition 2.3.1**

- *$f$ est un homomorphisme de groupes si:*
  $\forall (x, y) \in G \times G,\ f(x * y) = f(x) *' f(y)$
- *$f$ est un endomorphisme de groupes si:*
  *$f$ est un homomorphisme de groupes et que $(G, *) = (G', *')$*
- *$f$ est un isomorphisme de groupes si:*
  *$f$ est un homomorphisme de groupes bijectif de $G$ sur $G'$*
- *$f$ est un automorphisme de groupes si:*
  *$f$ est un endomorphisme de groupes bijectif de $G$ sur $G'$*

**Remarques:** Soit $f$ un homomorphisme de groupes de $G$ dans $G'$

- Soit $e$ et $e'$ les éléments neutres de $G$ et $G'$ respectivement.
  Alors $f(e * e) = f(e) *' f(e)$
  En utilisant le symétrique de $f(e)$ a gauche, on obtient:
  $f(e)^{-1} *' f(e) = f(e)^{-1} *' f(e) *' f'(e)$
  $\iff e' = f(e)$
- Soit $x$ un élément de $G$.
  $f(x * x^{-1}) = f(x) *' f(x^{-1})$
  Par ailleurs, $f(x * x^{-1}) = f(e) = e'$
  Donc $f(x) *' f(x^{-1}) = e$
  On en déduit que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$

**Propriété 2.3.1**

- *Si $F$ est un sous-groupe de $(G, *)$ et si $f$ est un homomorphisme de groupes de $G$ dans $G'$,*
  *Alors $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$*
- *Si $H'$ est un sous-groupe de $(G', *')$ et si $f$ est un homomorphisme de groupes de $G$ dans $G'$,*
  *Alors $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(G, *)$*

- 1$^{\text{er}}$ point: Montrer que $f(F)$ est un sous-groupe de $(G', *')$
  Donc montrer que $\forall (x', y') \in f(F),\ x' *' y'^{-1} \in f(F)$
  $F$ non vide, donc $f(F)$ non vide.
  Soit $x'$ et $y'$ deux éléments de $f(F)$.

Donc $\exists(x,y)\in F,\ f(x)=x'$ et $f(y)=y'$. Soit $x$ et $y$ deux tels éléments.

$$\begin{aligned} x' *' (y')^{-1} &= f(x) *' f(y)^{-1} \\ &= f(x*y^{-1}) \end{aligned}$$

Or, $F$ est un groupe, donc $x*y^{-1}\in F$, donc $x' *' (y')^{-1} \in f(F)$

Cela étant vrai pour tout $x'$ et $y'$ de $f(F)$, on en conclut que $f(F)$ est un sous-groupe de $(G',*')$.

- 2$^{\text{ème}}$ point: Montrer que $f^{-1} < H' >$ est un sous-groupe de $(g,*)$.

  - $f$ est un homomorphisme de groupes donc $f(e)=e'$
    De plus, $e'\in H'$ car $H'$ est un sous-groupe de $(G,*)$
    Donc $e\in f^{-1}<H'>$, donc $f^{-1}<H'>$ est non vide.
  - Montrer que $\forall(x,y)\in G\times G,\ (x\in f^{-1}<H'>$ et $x\in f^{-1}<H'>) \Rightarrow x*y^{-1}\in f^{-1}<H'>$ Soit $x$ et $y$ deux éléments de $f^{-1}<H'>$.
    Donc montrons que $x*y^{-1}\in f^{-1}<H'>$
    Donc montrons que $f(x*y^{-1})\in H'$
    $f(x*y^{-1}) = f(x)*f(y)^{-1}$ car $f$ est un homomorphisme de groupes .
    Or: - $f(x)\in H'$ car $x\in f^{-1}<H'>$
    - $f(y)\in H'$ car $y\in f^{-1}<H'>$ .
    - De plus, $H'$ est un sous-groupe donc $f(y)^{-1}\in H'$
    Sachant $H'$ un sous-groupe, $f(x*y^{-1})\in H'$
    Ce raisonnement étant valable pour tout $x,y$ de $f^{-1}<H'>$, on en déduit que $f^{-1}<H'>$ est un sous-groupe de $(G,*)$ d'après la critère 2.

$\square$

**Corollaire 2.3.1**

- *L'image $f(G)$ est un sous-groupe de $(G',*')$*
- *$f^{-1}<\{e\}>$ est un sous-groupe de $(G,*)$. On l'appelle le noyau de $f$*

**Notation:** $\ker(f) = f^{-1}<\{e\}>$

**Propriété 2.3.2**
*Soit $f$ un homomorphisme de groupes de $(G,*)$ dans $(G',*')$.*
*Alors $f$ est injective si et seulement si* $\ker(f)=\{e\}$

① Supposons $f$ injective.
Montrer que $\ker(f) = \{e\}$

- $\ker(f)$ est un sous-groupe de $(G, *)$, donc $\{e\} \subset \ker(f)$
- montrer que $\ker(f) \subset \{e\}$
  Donc montrer que $\forall x \in G,\ x \in \ker(f) \Rightarrow x = e$
  Soit $x$ un élément de $\ker(f)$
  Montrer que $x = e$
  $x \in \ker(f)$, donc $f(x) = e'$
  $f$ est un homomorphisme, donc $f(e) = e'$
  D'où $f(x) = f(e)$
  Donc, sachant $f$ injective, $x = e$

Donc $\ker(f) = \{e\}$

② Supposons que $\ker(f) = \{e\}$
Montrer que $\forall (x, y) \in G \times G,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Soit $x$ et $y$ deux éléments de $G$ tels que $f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff f(x) *' f(y)^{-1} = e' \\ &\iff f(x * y^{-1}) = e' \end{aligned}$$

Or, $\ker(f) = \{e\}$
Donc $x * y^{-1} = e$
Donc $x = y$
Ce raisonnement étant valable pour tout $x$ et $y$ de $G$, $f$ est injective.

$\square$