Suites Réelles
Suites extraites
MPSI 2

1 Définition

Définition 1.0.1
On dit que <u>v est une suite extraite de u</u> si il existe une application ϕ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\phi(n)}$

On appelle également v une sous-suite de u.
On a notamment:
- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des termes d'indices pairs de u
- $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des termes d'indices impairs de u

2 Propriétés de limites

Propriété 2.0.1
Lemme: *Si* $\phi\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante, alors* $\phi(n) \geqslant n$

Par récurrence, avec $\phi(0) \geqslant 0$ et $\phi(n+1) > \phi(n)$ □

Propriété 2.0.2
Si u tend vers l avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite de u tend vers l

① <u>1er cas:</u> $l \in \mathbb{R}$
Soit v une suite extraite de u, et $\phi : n \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.
Montrer que v converge vers l
Soit ε un réel strictement positif.
Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$
Soit n_0 un tel entier. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow n_0 \leqslant n \leqslant \phi(n)$
On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_{\phi(n)} - l| < \varepsilon$
Donc v converge vers l.
② On procède de manière analogue avec $l = \pm\infty$
□

Propriété 2.0.3
Soit u une suite réelle, soit w et z ses suites extraites d'indice pair et impair.
Si w et z tendent vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors u tend vers $\overline{\mathbb{R}}$

<u>1^{er} cas:</u> $l \in \mathbb{R}$
Supposons que w et z convergent vers l.
Donc: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow |z_n - l| < \varepsilon$

Soit n_0 et n_1 deux tels entiers, et ε un réel strictement positif.
Soit $N = \max(\{2\,n_0, 2\,n_1 + 1\})$
Etudions u_p avec $p \geqslant N$
- Si p est pair, on a $p = 2n$, donc $u_p = w_n$, et $|w_n - l| < \varepsilon$
- Si p est impair, on a $p = 2n+1$, donc $u_p = z_n$, et $|z_n - l| < \varepsilon$

Ceci étant vrai pour tout ε,
u converge vers l. □

3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass
Soit u une suite bornée.
Alors il existe une suite extraite de u convergente.

Soit u une suite réelle bornée, et A l'ensemble des valeurs de u.
Soit a et b tels que $A \subset [a, b]$ (car A est borné)
D'après le principe de dichotomie:
- Soit $I_0 = [a, b]$
  I_0 contient une infinité de termes de la suite: $I_0 \cap A$ est infini.
  Soit $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\frac{a+b}{2}\right]$ deux sous-ensembles de I_0 dont la réunion vaut I_0.
  L'intersection de l'un des deux avec A au moins est infini. Notons I_1 cet intervalle.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait une suite de segments $I_n \subset I_{n-1} \subset ... \subset I_0$
  telle que: $\forall j \in [0, n],\ I_j = [a_j, b_j]$

  $$\forall j \in [1, n],\ b_j - a_j = \frac{1}{2}(b_{j-1} - a_{j-1})$$

  $$\forall j \in [0, n],\ I_j \cap A \text{ est infini}$$

  On applique le principe de dichotomie au segment I_n
  On obtient le segment I_{n+1} tel que $I_{n+1} \cap A$ soit infini.

- Propriétés de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  La suite est décroissante par inclusion, c'est a dire que a est croissante, b décroissante.
  La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$
  Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{b-0-a_0}{2^n}$
  donc cette suite tend vers 0.
  Donc a et b sont deux suites adjacentes
  D'après le théorème des segments emboités, soit α tel que: $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \alpha$
- Soit $E'_0 = \{n \in \mathbb{N},\ u_n \in I_0 \cap A\}$
  Soit $\phi(0)$ un élément de E'_0, car $E'_0 \neq \varnothing$
  Considérons $E'_1 = \{n \in \mathbb{N},\ (n > \phi(n))$ et $(u_n \in I_1 \cap A)\}$
  Il n'y a que un nombre fini d'éléments de E'_0 non présents dans E'_1: E'_1 est infini.
  Notons $\phi(1)$ un élément de E'_1.
  Donc: $\phi(1) \in \mathbb{N},\ \phi(1) > \phi(0),\ u_{\phi(1)} \in I_1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons qu'on ait construit $\phi(0) < ... < \phi(n)$ des entiers naturels tels que:
  $\forall k \in [0, n[,\ u_{\phi(k)} \in I_k$
  On considère $E'_{n+1} = \{p \in \mathbb{N},\ p > \phi(n)$ et $u_p \in I_{n+1} \cap A\}$
  $I_{n+1} \cap A$ est infini, donc E'_{n+1} est infini.
  Donc E'_{n+1} est non vide, soit $\phi n + 1$ un élément de E'_{n+1}
  Donc on a: $\phi(n+1) \in \mathbb{N},\ \phi(n+1) > \phi(n),\ u_{\phi(N+1)} \in I_{n+1}$
- Par récurrence, on a construit une application ϕ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\phi(n)} \in I_n$
- D'après le point précédant, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leqslant u_{\phi(n)} \leqslant b_n$
  Or, a et b convergent vers une même limite
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \alpha$ par encadrement.

On a donc construit une suite extraite de u convergente.

Si A est un ensemble fini, alors procéder en construisant l'application ϕ avec un élément a de A tel que $E = \{n \in \mathbb{N},\ u_n = a\}$ et $\phi(\mathbb{N}) = \{a\}$ □

Remarques:

- On a $u_{\phi(n)} - \alpha \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^n}\right)$
  Ou bien $u_{\phi(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \alpha + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$
- $u_{\phi(n)}$ converge vers α a vitesse au moins géométrique.