

# Suites Réelles

## Théorèmes de comparaison

MPSI 2

### Théorème des suites monotones

Soit  $u$  une suite croissante. On a :

- Si  $u$  n'est pas majorée,  $u$  diverge vers  $+\infty$ .
- Si  $u$  est majorée,  $u$  converge vers la borne supérieure de ses valeurs.

On procède de même pour les suites décroissantes.

Soit  $u$  une suite décroissante, et  $A$  l'ensemble de ses valeurs.

① Supposons  $u$  non majorée.

Donc  $A$  n'est pas majoré.

Donc  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A, x > M$

Donc  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} > M$

Or, sachant  $u$  croissante,  $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n > M$

Donc  $u$  diverge vers  $+\infty$  par définition.

② Supposons  $u$  majorée.

Donc  $A$  est majoré et non vide. Donc  $A$  admet une borne supérieure, notée  $\alpha$ .

$\alpha$  est borne supérieure de  $A$ , donc :

–  $\alpha$  est un majorant de  $A$ :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$

–  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists x \in \mathbb{R}, (x \in A) \text{ et } (\alpha - \varepsilon < x \leq \alpha)$

C'est à dire:  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq \alpha$

Donc, sachant  $u$  croissante:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \alpha - \varepsilon < u_{n_0} \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$

Donc  $u$  converge vers  $\alpha$

□

### Théorème des suites adjacentes

Soit  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que:

- $u$  est croissante,  $v$  est décroissante.
- $u - v$  tend vers 0

Alors  $u$  et  $v$  convergent vers une même limite  $L$

Et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq L \leq v_n$

Soit  $u$  et  $v$  deux suites adjacentes

① Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

HA: Supposons  $n_0$  tel que  $v_{n_0} < u_{n_0}$

$u$  est croissante et  $v$  est décroissante:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq u_{n_0}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n \leq v_{n_0}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n_0} - v_{n_0} \geq u_n - v_n$$

$$\text{Or, sachant } u_{n_0} - v_{n_0} < 0, \text{ on a: } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_{n_0} - v_{n_0}| \leq |u_n - v_n|$$

Donc  $|u - v|$  est minoré par un réel strictement positif, et ne tend donc pas vers 0.

Donc il n'existe aucun  $n_0$  de  $\mathbb{N}$  tel que  $v_{n_0} < u_{n_0}$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

②  $u$  est décroissante et minorée (par tout terme de  $v$ ), elle admet une limite notée  $l_1$   
 $u$  est croissante et majorée (par tout terme de  $u$ ), elle admet une limite notée  $l_2$

$$\text{De plus, } \begin{cases} u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1 - l_2 \end{cases}$$

Donc, par unicité de la limite,  $l_1 = l_2$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq L \leq v_n$$

□

### Théorème des segments emboîtés

Si  $a$  et  $b$  deux suites adjacentes, avec  $a_0 \leq b_0$ , on pose  $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$

Alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{L\}$

Avec  $L$  la limite de  $a$  et  $b$

- Par le théorème des suites adjacentes,  $a$  et  $b$  tendent vers  $L$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq L \leq v_n$
- Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n) \Rightarrow (x = L)$

Ou bien montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, (x \neq L) \Rightarrow (x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n)$

Soit  $x$  un réel différent de  $\mathbb{R}$

– 1<sup>er</sup> cas:  $x > l$

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{L-x}{2}$$

$a$  converge vers  $L$  donc:  $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$$\text{Donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{L+x}{2} < a_n < \frac{3L+x}{2}$$

Soit  $n_0$  un tel entier.

$$\text{Donc } x < \frac{x+L}{2} < a_{n_0} \leq b_{n_0}, \text{ donc } x \notin I_{n_0}$$

$$\text{Par suite, } (x \neq L) \Rightarrow (x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n)$$

– 2<sup>ème</sup> cas:  $x < l$

Procéder de même.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, (x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n) \Rightarrow (x = L)$$

□