

Suites Réelles

Comparaison avec une suite géométrique

MPSI 2

1 Suites et séries géométriques

Définition 1.0.1

On appelle suite géométrique de raison a toute suite telle que:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n \end{cases}$$

Remarques:

- C'est équivalent à dire $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a^n u_0$
- Si $u_0 = 0$ alors la suite est nulle.
- Si $u_0 \neq 0$ alors l'étude de la suite est ramenée à l'étude de a^n à une constante multiplicative près.

étude de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Si $a > 1$ alors $\exists h \in \mathbb{R}^{+*}, a = 1 + h$

$$\text{De plus, } (h+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\text{En particulier, } (1+h)^n \geq nh$$

$$\text{Or par minoration, } a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

- Si $a = 1$ alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à 1.

- Si $a = -1$ alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

- Si $-1 < a < 1$ alors $|a|^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n}$

$$\text{et } \frac{1}{|a|^n} > 1 \text{ donc d'après le premier point, } \frac{1}{|a|^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{D'où } |a|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Ainsi, comme } |a|^n = |a^n|, a^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

- Si $a < -1$ alors $|a|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et a^n change de signe en fonction de la parité de n .

Donc $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Définition 1.0.2

On appelle série géométrique toute suite de terme général:

$$\begin{cases} u_n = \sum_{k=0}^n a^k \\ n \in \mathbb{N} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Étude de u_n

- Si $a = 1$ alors $u_n = n + 1$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
- Si $a \neq 1$ alors $u_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$
 - Si $-1 < a < 1$ alors $a^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
Donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
 - Si $1 < a$ alors $u \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
 - Si $a < -1$ alors u diverge.

2 Exemples de comparaison

Soit u une suite a termes positifs.

- Si $\exists K \in]0, 1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \leq K u_n$
Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$
- Si $\exists K \in]1, +\infty[, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \geq K u_n$
Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

3 Echelle de comparaison

Par ordre de négligeabilité:

$$0 < a < 1 \quad \left| \quad (\ln(n))^\alpha \quad \left| \quad n^\beta \quad \left| \quad n! \quad \left| \quad n^n \right. \right. \right.$$