Suites Réelles
Généralités

MPSI 2

1 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.0.1
On note $\overline{\mathbb{R}}$ la réunion de $\mathbb{R}$ et de deux éléments distincts: $-\infty$ et $+\infty$
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

- On peut prolonger partiellement les lois internes $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$, mais il existe des opération indéfinies.
- On peut prolonger la relation d'ordre naturelle de $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$: $\overline{\mathbb{R}}$ est ordonné.

Utilisation: une suite tend vers un élément de $\overline{\mathbb{R}}$

2 Définitions

Définition 2.0.2
On appelle suite réelle toute application $\phi\colon \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto \phi(n) \end{array}$

Une suite réelle est une famille d'éléments indexée par $\mathbb{N}$

Notations: $\begin{array}{l} u_n = \phi(n) \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \phi \end{array}$

Définition 2.0.3
On appelle ensemble des valeurs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = u_n\}$$

Définition 2.0.4
On dit que u est une suite monotone si ϕ est monotone.
De même avec croissante et décroissante.

Définition 2.0.5
On dit que u est majorée si A est majoré dans $\mathbb{R}$
De même avec minorée et bornée.

3 Notations et limites

3.1 Limites réelles

Définition 3.1.1
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite réelle, et l un réel.
On dit que u converge vers l si pour tout intervalle I centré en l, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les u_n sont dans I:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$$

Propriété 3.1.1
Si u converge vers un l réel, alors l est unique.

Utiliser les définitions, raisonner par l'absurde avec $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$ □

Notation: Si u converge vers l, on note: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

Propriété 3.1.2
Toute suite convergente est bornée.

Montrer que toute suite convergente est bornée.
Soit A l'ensemble des valeurs de u, suite convergeant vers l.
Donc montrons que $\exists(a,b) \in \mathbb{N},\ A \in [a,b]$

- u converge vers l donc pour $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow l-1 < u_n < l+1$
  Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, un tel entier.

- Soit $B = \{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in [\![0, n-1]\!],\ x = u_n\}$
  B est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ donc B est borné.

Posons $a = \min(\{l-1\} \cup B)$

$b = \min(\{l+1\} \cup B)$

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leqslant u_n \leqslant b$ □

Propriété 3.1.3

Soit u une suite réelle convergeant vers l, telle qu'a partir d'un certain rang, tous ses termes appartiennent à un intervalle borné par a et b.
Alors $l \in [a, b]$

En sachant que u converge et que ses termes appartiennent a un intervalle borné, faire l'hypothèse que $\notin [a, b]$
Conclure. □

Propriété 3.1.4

Soit u une suite convergeant vers l. Alors:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| < |l| + 1$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow l - 1 < u_n < l + 1$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow \dfrac{|l|}{2} < u_n < \dfrac{3\,|l|}{2}$

- $\varepsilon = 1$ et d'après la $2^{ème}$ inégalité triangulaire: $\big|\,|u_n| - |l|\,\big| \leqslant |u_n - l| < 1$
  Donc $|u_n| \in]|l| - 1, |l| + 1[$
- $\varepsilon = 1$
- $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, en utilisant le cas 1 et la $2^{ème}$ inégalité triangulaire.

□

Propriété 3.1.5

Si u converge vers l, alors la suite de terme général $|u_n|$ converge vers $|l|$.

Propriété 3.1.6
Soit u une suite à termes positifs.
- *Si u admet une limite l, alors $l \geqslant 0$*
- *Si de plus $l \neq 0$, alors $u_n > \frac{l}{2}$*

3.2 Limites infinies

Définition 3.2.1
Soit u une suite réelle
- *Si u n'admet pas de limites dans $\mathbb{R}$, on dit que u diverge.*
- *On dit que u diverge vers $-\infty$ si:*
  $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < K$
- *On dit que u diverge vers $+\infty$ si:*
  $\forall K \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > K$

Notation: Si u diverge vers l'infini, on note: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$