

# Relations Binaires

## Relations d'équivalence sur un ensemble

MPSI 2

### 1 Généralités

Soit  $E$  un ensemble non vide.

#### Définition 1.0.1

On appelle relation binaire sur  $E$  le couple  $(E, G)$  où  $G$  est un graphe de  $E$  dans  $E$ .

**Notations:**  $(E, G), \mathcal{R}$

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff (x, y) \in G$$

Notons  $\Delta_E = \{(x, x), x \in E\}$

$\Delta_E$  s'appelle la diagonale de  $E$

On en définit une relation binaire:

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y &\iff (x, y) \in \Delta_E \\ &\iff x = y \end{aligned}$$

### 2 Relations d'équivalences

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire sur  $E$

#### Définition 2.0.2

$\mathcal{R}$  est réflexive si  $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$

#### Définition 2.0.3

$\mathcal{R}$  est symétrique si  $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$

#### Définition 2.0.4

$\mathcal{R}$  est transitive si  $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$

**Définition 2.0.5**

$\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$  si  $\mathcal{R}$  est réflexive, symétrique et transitive.

**Définition 2.0.6**

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence sur  $E$ .

Soit  $x$  un élément de  $E$ .

On appelle classe d'équivalence de  $x$  suivant  $\mathcal{R}$  le sous ensemble de  $E$ :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in E, x \mathcal{R} y\}$$

**Propriété 2.0.1**

La famille des classes d'équivalences suivant  $\mathcal{R}$ ,  $(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x))_{x \in E}$  est une partition de  $E$ .

① Montrer que:  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \neq \emptyset$

$\mathcal{R}$  est réflexive, donc  $x \mathcal{R} x$

Autrement dit,  $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$  donc  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \neq \emptyset$

② Montrer que:  $\bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = E$

$$\iff \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E \text{ et que } E \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

a) Les classes d'équivalences sont des sous-ensembles de  $E$ .

$$\forall x \in E, \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E$$

$$\text{Ainsi, } \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset E$$

b) Montrer que:  $E \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

$$\iff \forall t \in E, t \in \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

$\mathcal{R}$  est réflexive, donc  $t \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(t)$

En posant  $t = x$  on démontre la proposition.

Cela étant vrai pour tout  $x$ , on obtient  $E \subset \bigcup_{x \in E} \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

③ Montrer que:  $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$  ou  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) = \emptyset$

$$\iff \forall (x, y) \in E^2, (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset) \Rightarrow (\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y))$$

H<sub>1</sub>: Soit  $(x, y)$  un couple d'éléments de  $E$  tels que  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset$

Montrer que:  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

$$\iff \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \text{ et } \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

a) Montrer que:  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

$$\iff \forall z \in E, z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \Rightarrow z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$$

H<sub>2</sub>: Soit  $z$  un élément de  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

Montrer que  $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

D'après H<sub>1</sub>,  $\exists t \in E, t \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

H<sub>3</sub>: Soit  $t_0 \in E$  tel que  $t_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$  et  $t_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

Montrer que:  $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

$$\iff z \mathcal{R} y$$

D'après H<sub>2</sub>:  $z \mathcal{R} x$

D'après H<sub>3</sub>:  $t_0 \mathcal{R} x$

Par symétrie et transitivité:  $z \mathcal{R} t_0$

D'après H<sub>2</sub>:  $t_0 \mathcal{R} y$

Par transitivité:  $z \mathcal{R} y$

Conclusion 1:  $z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}} \Rightarrow z \in \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

Conclusion 2: Ceci étant vrai pour tout  $z$  dans  $E$ :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$$

b) Montrer que  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$

En échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ , et par une démonstration analogue, on obtient:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x)$$

Finalement:  $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y)$

Conclusion Générale:  $\forall (x, y) \in E^2, \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{R}}(y) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}}$

La famille  $(\mathcal{C}_{\mathcal{R}}(x))_{x \in E}$  est une partition de  $E$ . □

### Propriété 2.0.2

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une partition de  $E$ , alors, il existe une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  dont la famille des classes d'équivalences est cette partition.

Soit  $\mathcal{R}$  une relation binaire définie par:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff \exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

① Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur  $E$ .

a) Montrer que  $\mathcal{R}$  est réflexive

$$\iff \forall x \in E, x \mathcal{R} x$$

H<sub>1</sub>: Soit  $x$  un élément de  $E$

Montrer que:  $\exists i \in I, x \in A_i$

$A_i$  est une partition de  $E$ , donc d'après H<sub>1</sub>,

$$\exists i \in I, x \in A_i$$

b) Montrer que  $\mathcal{R}$  est symétrique

$$\iff \forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y) \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$$

H<sub>1</sub>: Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $x \mathcal{R} y$

H<sub>2</sub>:  $\exists i \in I, x \in A_i$  et  $y \in A_i \iff \exists i \in I, y \in A_i$  et  $x \in A_i$

On a donc  $y \mathcal{R} x$

Donc  $\mathcal{R}$  est symétrique.

c) Montrer que  $\mathcal{R}$  est transitive

$\iff \forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$

H<sub>1</sub>: Soit  $x, y$  et  $z$  trois éléments de  $E$  tels que  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$  H<sub>1</sub>:  $\exists i \in I, (x \in A_i$   
et  $y \in A_i)$  et  $(\exists j \in I, y \in A_j$  et  $z \in A_j)$

H<sub>2</sub>: Soit  $i_0$  et  $i'_0$  deux éléments de  $I$  tels que  $\begin{cases} x \in A_{i_0}, & y \in A_{i_0} \\ y \in A_{i'_0}, & z \in A_{i'_0} \end{cases}$

Donc  $y \in A_{i_0} \cap A_{i'_0}$

Or  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$

Donc  $A_{i_0} = A_{i'_0}$

Donc  $x, y$  et  $z$  sont des éléments de  $A_{i_0}$ ,

Donc  $x \mathcal{R} z$  Donc  $\mathcal{R}$  est transitive.

Conclusion ①:  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

② Montrer que les  $A_i$  sont les classes d'équivalences suivant  $\mathcal{R}$

$\iff \forall i \in I, \exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$

H<sub>1</sub>: Soit  $i$  un élément de  $I$ .

Montrer que  $\exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$

$(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$ , donc en particulier

$A_i$  non vide, écrit:

$\exists x \in E, x \in A_i$

H<sub>2</sub>: Soit  $x_0$  un élément de  $A_i$  fixé.

Montrer que  $A_i = C_{\mathcal{R}}(x_0)$

$\iff (A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0))$  et  $(C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i)$

a) Montrer que  $A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)$

$\iff \forall y \in E, y \in A_i \Rightarrow y \in C_{\mathcal{R}}(x_0)$

H<sub>3</sub>: Soit  $y$  un élément de  $A_i$ .

Montrer que  $y \in C_{\mathcal{R}}(x_0)$

D'après H<sub>1</sub> et H<sub>2</sub>, on a  $y \in A_i$  et  $x_0 \in A_i$

Donc  $x \mathcal{R} y$  par définition de  $\mathcal{R}$

Cela étant valable pour tout  $i$  dans  $I$  et pour tout  $y$  dans  $A_i$ ,

$A_i \subset C_{\mathcal{R}}(x_0)$

b) Montrer que  $C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i$

$\iff \forall j \in E, y \in C_{\mathcal{R}}(x_0) \Rightarrow y \in A_j$

H<sub>4</sub>: Soit  $y$  un élément de  $C_{\mathcal{R}}(x_0)$

Montrer que  $y \in A_i$

H<sub>4</sub>:  $y \mathcal{R} x_0$ , autrement dit:

$\exists j \in I, y \in A_j$  et  $x_0 \in A_j$

H<sub>5</sub>: Soit  $j_0$  un élément de  $I$  tel que  $y \in A_{j_0}$  et  $x_0 \in A_{j_0}$

D'après H<sub>2</sub>:  $x_0 \in A_i$

Avec H<sub>2</sub> et H<sub>3</sub>, on en déduit que  $x_0 \in A_i \cap A_{j_0}$

Or  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$ , donc  $A_i = A_{j_0}$

Montrer que  $y \in A_i$

Or,  $y \in A_{j_0}$ , donc  $y \in A_i$

Cela étant valable pour tout  $y$  dans  $A_i$ ,

$C_{\mathcal{R}}(x_0) \subset A_i$

Conclusion ②:  $\forall i \in I, \exists x \in E, A_i = C_{\mathcal{R}}(x)$

Conclusion générale: Par raisonnement sur des conditions nécessaires et suffisantes, la propriété est démontrée  $\square$

### 3 Partition associée a une application

Soit  $E$  un ensemble non vide, soit  $F$  un ensemble.

Soit une application  $f: E \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x)$$

#### Définition 3.0.7

On appelle relation d'équivalence associée a  $f$  la relation définie par:

$$\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$$

#### Définition 3.0.8

On appelle partition associée a  $f$  la famille des classes d'équivalences suivant  $\mathcal{R}_f$