Eléments de Théorie des Ensembles
Graphes et Applications

MPSI 2

1 Graphes de E vers F

Soit E et F deux ensembles.
On note $E \times E = \{(x, y), x \in E \text{ et } y \in F\}$

Définition 1.0.1
On appelle graphe de E dans F tout sous-ensemble G de $E \times F$

Définition 1.0.2
On appelle correspondance de E vers F tout triplet (G, E, F) où E et F sont deux ensembles et G un graphe de E vers F.

Définition 1.0.3
Soit E et F deux ensembles.
Soit (G, E, F) une correspondance de E vers F, On dit que (G, E, F) est une application de E dans F si pour tout élément de E, l'ensemble des y de F tels que (x, y) soit dans G est réduit a un et un seul élément

Notations :

$$f : (G, E, F) \text{ ou } f : \begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto y \text{ tel que } (x, y) \in G \end{aligned}$$

Pour tout x de F, l'ensemble $\{y \in F, (x, y) \in G\}$ est réduit a un seul élément On notera cet élément $f(x)$.

Définition 1.0.4
Soit f une application de E dans F.
Soit A un sous-ensemble de E.
L'ensemble $f(A) = \{f(x), x \in A\}$ est un sous-ensemble de F que l'on appelle image de A par f.

Remarques :
- $f(\varnothing) = \varnothing$
- $f(E)$ s'appelle l'image de f.

Définition 1.0.5
Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application.
Soit B un sous-ensemble de F.
On appelle image réciproque de B par f le sous-ensemble de E note $f^{-1} < B >$ tel que $f^{-1} < B >= \{x \in E, f(x) \in B\}$.

Remarques :
- $f^{-1} < F >= E$
- Soit y un élément de F. On prend $B = \{y\}$

$$\begin{aligned} f^{-1} < B > &= f^{-1} < \{y\} > \\ &= \{x \in E, f(x) = y\} \end{aligned}$$

Définition 1.0.6
Soit f une application de E dans F.
- *f est dite injective si deux élément distincts de E ont des images distinctes par f.*
- *f est dite surjective si tout élément de F est dans $f(E)$.*
- *f est dite bijective si elle est surjective et injective.*

Définition 1.0.7

- *Soit f une application de E dans F.*
  Soit A un sous-ensemble de E.
  On appelle restriction de f a A l'application notée $f_{|A}$ telle que :

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- *Soit f une application de E dans F.*
  Soit E' un ensemble tel que E soit un sous-ensemble de E'. Soit g une application de E' dans F.
  On dit que g est un prolongement de f par E' si $g_{|E} = f$

Définition 1.0.8
Soit E un ensemble.
Soit A un sous-ensemble de E.
On appelle application caractéristique de A (fonction indicatrice de A) l'unique application notée $\mathbb{1}_A$ et définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A \colon E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto (x \in A) \end{aligned}$$

Propriété 1.0.1
Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.
Notons $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ l'ensemble des applications définies sur E a valeurs dans $\{0,1\}$.
L'application

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

réalise une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$.