Fonctions Usuelles
Fonctions Exponentielles

MPSI 2

Définition 0.0.1

- *La fonction exponentielle est l'application reciproque de ln, notee exp.*
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, *la fonction exponentielle en base a est l'application reciproque de* log_a. *On note* $exp_e = exp$

Propriété 0.0.1

- exp *realise une bijection de* $\mathbb{R}^{+*}$ *sur* $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ exp'_a(x) = ln(a)\ exp_a(x)$
- exp_a *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

- Par le theoreme des fonctions reciproques.
- Par reccuerence.

□

Valeurs remarquables:

- $exp_a(0) = 1$
- $exp_a(1) = a$

Propriété 0.0.2

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\},\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ exp_a(x + y) = exp_a(x)\ exp_a(y)$
- $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}\right)^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ exp_{ab}(x) = exp_a(x)\ exp_b(x)$

Application de log aux quantites:
1/ Soit a et b deux reels:

$$log_a(exp_a(x+y)) = x + y$$

$$\begin{aligned} log_a(exp_a(x)\ exp_a(y)) &= log_a(exp_a(x)) + log_a(exp_a(y)) \\ &= x + y \end{aligned}$$

Les deux quantites sont egales et **log est bijective** donc:
$exp_a(x+y) = exp_a(x)\ exp_a(y)$

2/ On utilise log_{ab}

$$log_{ab}(x) = x$$

$$\begin{aligned} log_{ab}(exp_a(x\ exp_b(x)) &= log_{ab}(exp_a(x)) + log_{ab}(exp_b(x)) \\ &= \frac{ln(a)}{ln(ab)}x + \frac{ln(b)}{ln(ab)}x \\ &= \frac{ln(a)+ln(b)}{ln(ab)}x \\ &= x \end{aligned}$$

Les deux quantites sont egales, donc:
$\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}\right)^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ exp_{ab}(x) = exp_a(x)\ exp_b(x)$

$\square$

Remarques

- $exp_a(x) = exp(x\ ln(a))$
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ a^x = exp_a(x)$
  D'ou les proprietes classiques sur les exposants