

# Complexes

## Fonctions a valeurs complexes

MPSI 2

Soit  $\mathcal{I}$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $f: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$  une application définie sur  $\mathcal{I}$  et a valeurs complexes.

$$t \mapsto f(t)$$

$$\forall t \in \mathcal{I}, f(t) = f_1(t) + \imath f_2(t)$$

On définit ainsi deux fonctions sur  $\mathcal{I}$  a valeurs réelles :  $f_1$  et  $f_2$ .

$$\text{On a : } \forall t \in \mathcal{I}, \begin{cases} f_1(t) = \mathcal{R}e(f(t)) \\ f_2(t) = \mathcal{I}m(f(t)) \end{cases}$$

### Définition 0.0.1

- On dit que  $f$  admet une limite lorsque  $t$  tend vers  $t_0$  sur  $\mathcal{I}$  si les fonctions composantes  $f_1$  et  $f_2$  admettent une limite finie quand  $t$  tend vers  $t_0$ .

Dans ce cas, la limite de  $f(t)$  quand  $t$  tend vers  $t_0$  est :

$$L = L_1 + \imath L_2 \quad \text{ou} \quad L_1 = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f_1(t) \quad \text{et} \quad L_2 = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f_2(t)$$

**Notation :**  $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in \mathcal{I}}} f(t) = L$

- $f$  est continue sur  $\mathcal{I}$  si  $f_1$  et  $f_2$  sont continues sur  $\mathcal{I}$ .
  - $f$  est dérivable en  $t_0$  si  $f_1$  et  $f_2$  sont dérivables en  $t_0$ .
- Dans ce cas, le nombre dérivé de  $f$  en  $t_0$  est par définition :

$$f'(t_0) = f_1'(t_0) + \imath f_2'(t_0)$$

- Soit  $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$  une application définie sur  $\mathcal{I}$  a valeurs dans  $\mathbb{C}$ .  
On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathcal{I}$  si  $F$  est dérivable sur  $\mathcal{I}$  et si :

$$\forall t \in \mathcal{I}, F'(t) = f(t)$$

On a alors :

$$\forall t \in \mathcal{I}, F_1'(t) + \imath F_2'(t) = f_1(t) + \imath f_2(t)$$

- Si  $f$  est continue sur un segment  $[a, b]$ , on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt + \imath \int_a^b f_2(t) dt$$

**Cas particulier de fonctions a valeurs complexes :** L'exponentielle complexe

Soit  $z_0 = a + ib$  un nombre complexe.

**Cas 1 :**  $z_0$  reel

$e^{z_0}$  a un sens (exponentielle réelle).

**Cas 2 :**  $z_0$  imaginaire

$$z_0 = i\theta$$

$$e^{z_0} = e^{i\theta}$$

$$= \cos \theta + i \sin \theta$$

**Cas 3 :**

Si  $z_0 = a + ib$ , on pose :  $e^{z_0} = e^a e^{ib}$

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto e^{z_0 x}$$

$f$  est une fonction a valeurs complexes et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= e^{(a+ib)x} \\ &= e^{ax+ibx} \\ &= e^{ax} e^{ibx} \\ &= e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \end{aligned}$$

Les applications composantes de  $f$  sont :

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & f_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^{ax} \cos bx & & & x &\mapsto e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

$f_1$  et  $f_2$  sont derivables su  $\mathbb{R}$  donc  $f$  est derivable sur  $\mathbb{R}$  et:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'_1(x) &= e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) \\ f'_2(x) &= e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) \\ f'(x) &= e^{ax} [(a + ib) \cos bx + i(a + ib) \sin bx] \\ &= (a + ib) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \\ &= (a + ib) e^{(a+ib)x} \end{aligned}$$